157 — Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Soit $\mathbb{K}$ corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in End(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I) Endomorphismes trigonalisables

1) Notion de trigonalisabilité

XXI.1 [Rom]

Définition 1: On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire.
On dit que A est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 2: Si A est trigonalisable semblable à T triangulaire,
Alors: les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A.

Corollaire 3: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a des valeurs propres complexes non-réelles
Alors: A n'est pas trigonalisable.

Exemple 4: Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $Sp(A) = \{\pm i\}$ et A n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Lemme 5: Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
Alors: il existe un hyperplan de E stable par u

Théorème 6: u est trigonalisable ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire 7: Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme est trigonalisable.

Corollaire 8: Si $u \in End(E)$ est trigonalisable, F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors: $u_{|F}$ est aussi trigonalisable

Application 9: Si u est trigonalisable
Alors: $Tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda$ et $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda$

2) Conséquences topologiques

XXI.7 [Rom]

Remarque 10: On se donne ici une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le choix n'est pas important puisqu'on est en dimension finie.

Notation 11: On note $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices diagonalisables, $\mathcal{D}_n'(\mathbb{K})$ celui des matrices à valeurs propres 2 à 2 distinctes.

Théorème 12: $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n'(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 13: $T_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$.

Proposition 14: L'application $\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}[X] \\ M \mapsto \chi_M \end{array}$ est continue.

Corollaire 15: L'application $\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}[X] \\ M \mapsto \pi_M \end{array}$ n'est pas continue.

3) Méthodes de résolution de $Ax=b$

Soit $b \in \mathbb{K}^n$. On souhaite résoudre $Ax=b$.

VI.2 [All]

Théorème 16: Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\Delta^k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{K})$
Alors: $\exists! (L;U) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid L$ triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure avec $(l_{i,i}=1)_{i=1}^n$ tels que $A = LU$

Théorème 17: Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
Alors: $\exists! B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid B$ triangulaire inférieure à termes diagonaux positifs tels que $A = BB^*$

Remarque 18: Ces factorisations requièrent du $O(n^3)$ opérations.

VIII.1

Définition 19: Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière de A tout couple $(M;N) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = M - N$.
Une méthode itérative basée sur $(M;N)$ est: $x_0 \in \mathbb{K}^n$
$\forall k \in \mathbb{N}$, $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.
La méthode itérative converge si: $\forall x_0 \in \mathbb{K}^n$, $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x$ avec $Ax=b$.

Théorème 20: Une méthode itérative converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 21: Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ et $(M;N)$ décomposition régulière de A
Alors: $(M^* + N) \in H_n(\mathbb{C})$.
Si en plus, $(M^*+N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$

II] Endomorphismes nilpotents

1] Notion de nilpotence

[XX.2] **Définition 22 :** On dit que u est nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$. On appelle indice de nilpotence un tel entier q.

Exemple 23 : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute matrice triangulaire supérieure de sur diagonale non-nulle et nulle partout ailleurs est nilpotente d'indice $n-1$.

[Rom] **Lemme 24 :** Soit $u \in End(E)$ nilpotente.
Alors : 0 est valeur propre de u et $Tr(u) = 0$.

Théorème 25 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos,
Alors : u est nilpotent ssi 0 est la seule valeur propre de u.

Contrexemple 26 : L'hypothèse sur $\mathbb{K}$ est vitale !
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a 0 pour seule valeur propre mais n'est pas nilpotente.

Théorème 27 : Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle,
Alors : u est nilpotent ssi $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $Tr(u^k) = 0$

[Isen] **Application 28 :** (théorème de Burnside) Soit G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que : $\exists N \in \mathbb{N}^* \setminus \forall A \in G$, $A^N = I_n$
Alors : G est fini

2] Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

[Rom] [XXI.3] **Définition 29 :** On appelle adjoint de u l'application ${}^t u \in End(E^*)$ telle que : $\forall \varphi \in E^*$, ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$

Lemme 30 : Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'ordre q
Alors : ${}^t u \in End(E^*)$ est nilpotent d'ordre q.

Lemme 31 : Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$ [XXI.3]
Alors : $\forall x \in E$, $u^{q-1}(x) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_{u,x} := (u^k(x))_{k=0}^{q-1}$ est libre et l'espace $F = Vect(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u. [Rom]

Proposition 32 : Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.
Alors : $\exists \varphi \in E^* \setminus \exists x \in E \setminus F = Vect(x; u(x); \dots; u^{q-1}(x))$ et l'orthogonal G dans E de $H = Vect(\varphi; {}^t u(\varphi); \dots; ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ sont stables par u et $E = F \oplus G$

Théorème 33 : Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.
Alors : $\exists \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ base de E telle que chaque sous-espace vectoriel $E_i = Vect(\mathcal{B}_i)$ est stable par u et :
$Mat_{\mathcal{B}}(u_{|E_i}) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K})$ avec $q_i = \dim(E_i)$

III] Utilisation en réduction et décomposition d'endomorphismes

1] Diagonalisation par blocs triangulaires

Lemme 34 : Soit $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ annulateur de u, $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $N_k = Ker(u - \lambda_k id)^k$. [XXI.4]
Alors : $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $(u - \lambda_k id)_{|N_k}$ est nilpotente d'indice β_k multiplicité de λ_k dans Π_u.

Théorème 35 : (de Jordan) Soit $u \in End(E) \setminus \{0\}$ de polynôme caractéristique χ_u scindé : $\chi_u = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec les λ_k deux à deux distincts. [Rom]
Alors : $\exists \mathcal{B}$ base de $E \setminus Mat_{\mathcal{B}}(u) = diag(J_1; \dots; J_p)$ avec $\forall k \in [\![1;p]\!]$,
$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (0) \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & \\ (0) & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$ où $\varepsilon_{k,i} \in \{0;1\}$

Corollaire 36 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos,
Alors : A est semblable à une réduite de Jordan.

[NR]

Proposition 37 : Un algorithme pour déterminer une forme de Jordan :

(1) Calculer χ_A et déduire les valeurs propres et multiplicités algébriques associées

(2) $\forall \lambda \in Sp(A)$, déterminer $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ d'où : $\dim(E_\lambda)$ le nombre de blocs de Jordan associés à λ

(3) Pour chaque $\vec{vp}$ de E_λ, on construit le bloc de Jordan associé :

(i) Si $\vec{v_1}$ est $\vec{vp}$ dans E_λ, on cherche $\vec{v_2}$ tq : $(A - \lambda I_n)\vec{v_2} = \vec{v_1}$

(ii) Puis on cherche si $\exists \vec{v_3}$ tq : $(A - \lambda I_n)\vec{v_3} = \vec{v_2}$

(iii) On arrête dès qu'il n'y a plus de solutions

(iv) D'où la base $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$ où la matrice A est $\lambda I_p + J$

(4) On recommence pour $\vec{v_1}$ un autre vecteur de la base de E_λ

(5) On répète pour les autres vp.

3) Décomposition de Dunford

XIX.5

Lemme 38 : Soit $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u et $\forall k \in [\![1;p]\!]$ $N_k = \ker(u - \lambda_k id)^{m_k}$.

Alors : $\forall k \in [\![1;p]\!]$, le projecteur π_k de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k}^{p} N_j$ est un polynôme en u.

Théorème 39 : (de Dunford) Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors : $\exists! (d;n) \in End(E) \mid d$ diagonalisable, n nilpotent, $nd = dn$ tels que $u = d + n$. De plus, $d, n \in \mathbb{K}[u]$.

[Rom]

Corollaire 40 : Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors : $\exists! (D;N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid D$ diagonalisable, N nilpotent, $DN = ND$ tels que $A = D + N$. De plus, $D, N \in \mathbb{K}[A]$.

Exemple 41 : Pour $a \neq b$, la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ n'est pas $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $D = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = O_2$ puisque D est déjà diagonalisable et $DN = ND = O_2$

IV) Un théorème pour les réduire tous

1) Matrice compagnon et endomorphismes cycliques

Ann. B [GouAl]

Définition 42 : Soit $x \in E$. On note π_x le polynôme unitaire tel que $\langle \pi_x \rangle = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

Proposition 43 : E_x est un sous-espace de E de dimension $\deg(\pi_x)$ de base $(u^k(x))_{k=0}^{\deg(\pi_x)-1}$.

Proposition 44 : $\exists x \in E \mid \pi_x = \pi_u$

Définition 45 : On dit que u est cyclique si $\exists x \in E \mid E_x = E$.

Proposition 46 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors : $\pi_{C(P)} = \chi_{C(P)} = P$

Théorème 47 : Soit $u \in End(E)$ cyclique.

Alors : $\exists \mathcal{B}$ base de $E \mid Mat_{\mathcal{B}}(u) = C(\pi_u)$

2) Invariants de similitude et réduction de Frobenius

Ann. B [GouAl]

Théorème 48 : Il existe $F_1, \dots, F_r$ sous-espaces de E stables par u tq :

(1) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$

(2) $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $u_i = u_{|F_i}$ est cyclique

(3) $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\pi_{i+1} \mid \pi_i = \pi_{u_i}$

Les $\pi_1, \dots, \pi_r$ s'appellent les invariants de similitude de u et ne dépendent que de u.

Théorème 49 : (de réduction de Frobenius) Soit $\pi_1, \dots, \pi_r$ les invariants de similitude de u.

Alors : Il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C(\pi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi_r) \end{pmatrix}$ et $\pi_1 = \pi_u$ et $\chi_u = \pi_1 \times \dots \times \pi_r$.

Corollaire 50 : Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

Application 51 : À partir de la réduction de Frobenius, on peut retrouver la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie – Rombaldi

[All] Algèbre linéaire numérique – Allaire

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques – Isenmann

[NR] No Reference !!

[GouAl] Les maths en tête Algèbre – Gourdon