156 Exponentielle de matrices. Applications.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

I] Exponentielle matricielle

1] Série matricielle

[Rom] XXIII.1

Définition 1: Le spectre de A est l'ensemble de ses valeurs propres $Sp(A)$ et le rayon spectral est: $\rho(A)=\max\{|\lambda|, \lambda\in Sp(A)\}$

Proposition 2: $\forall k\in\mathbb{N}$, $\rho(A^k)=\rho(A)^k$ et pour toute norme matricielle $\|.\|$, $\rho(A)\le\|A\|$

Lemme 3: $\forall\varepsilon>0$, il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ telle que: $\|A\|\le\rho(A)+\varepsilon$

Théorème 4: Soit $\sum a_k z^k$ série entière de rayon de convergence $R>0$. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A)<R$.
Alors: $\sum a_k A^k$ est normalement convergente et si $\rho(A)>R$, alors $\sum a_k A^k$ est divergente

Corollaire 5: En notant $f(A)=\sum a_k A^k$, on a: $f(A)\in\mathbb{K}[A]$.

Théorème 6: Soit $\sum a_k z^k$ série entière de rayon de convergence $R>0$, f sa somme.
Alors: (1) Si $\rho(A)=0$, alors $\varphi(t)=f(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
(2) Si $0<\rho(A)<R$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{R}{\rho(A)},\frac{R}{\rho(A)}[$
Dans les deux cas, $\varphi'(t)=Af'(tA)$ avec $f'(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$

Exemple 7: Si $\rho(A)<1$, alors $I_n-A\in GL_n(\mathbb{K})$ et $(I_n-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}A^k$.

2] Notion d'exponentielle matricielle

[Rom] XXIII.2

Proposition 8: La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ est de rayon de convergence $+\infty$ et alors $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente et sa somme est appelée exponentielle de A, notée $\exp(A)$.

Exemple 9: $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\exp(\lambda I_n)=e^\lambda I_n$

Théorème 10: $\det(\exp(A))=\exp(Tr(A))$

Corollaire 11: $\exp(A)\in GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition 12: Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB=BA$.
Alors: $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$

Corollaire 13: $\exp(A)^{-1}=\exp(-A)$.

Corollaire 14: $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un morphisme

Exemple 15: Pour $\theta\in\mathbb{R}$, $A_\theta=\begin{pmatrix}0&-\theta\\ \theta&0\end{pmatrix}$, $\exp(A_\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$
$A_\theta=\begin{pmatrix}0&0\\ \theta&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\theta\\0&0\end{pmatrix}$ mais $\exp(A_\theta)\neq\exp\begin{pmatrix}0&0\\ \theta&0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0&-\theta\\0&0\end{pmatrix}$

Proposition 16: Soit $P\in GL_n(\mathbb{K})$ et $B=PAP^{-1}$.
Alors: $\exp(B)=P\exp(A)P^{-1}$

Application 17: La réduction de A en matrice diagonale permet de calculer facilement $\exp(A)$.

3] Calcul par décomposition de Dunford

[Rom] XIX.5

Lemme 18: Si $P=\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}\in\mathbb{K}[X]$ annule A, $N_k=\ker(A-\lambda_k I_n)^{m_k}$
Alors: $\mathbb{K}^n=\bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et $\forall k\in[\![1;r]\!]$, le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{j\neq k}^{r} N_j$ est un polynôme en A.

Théorème 19: (de décomposition de Dunford) Si χ_A est scindé
Alors: $\exists!(D,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ | D diagonalisable, N nilpotent, $DN=ND$ et $A=D+N$ avec $D,N\in\mathbb{K}[A]$.

Remarque 20: On peut se passer de l'hypothèse sur χ_A en remplaçant "D diagonalisable" par "D semi-simple".

Exemple 21: Si $a\neq b$, la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}$ n'est pas $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix}$ mais $D=\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ car D est déjà diagonalisable et $DN=ND$

[Rom] XXIII.3

Corollaire 22 : Dans ce cas, $\exp(A) = \exp(D)\sum_{k=0}^{q-1}\frac{N^k}{k!}$ avec q l'indice de nilpotence de N, et la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)[\exp(N) - I_n]$

Corollaire 23 : Dans ce cas, A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ l'est.

II) Propriétés de l'exponentielle matricielle

1) Régularité

[Rom] XXIII.2

Théorème 24 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

Proposition 25 : exp est différentiable en 0 et $d_0\exp = I_n$

Corollaire 26 : exp réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de O_n dans un voisinage de I_n.

Théorème 27 : exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$d_X\exp : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \\ H \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} X^i H X^j\right)\end{array}$$

Corollaire 28 : $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

2) Injectivité et surjectivité

[Zad]

Proposition 29 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas injective.

Exemple 30 : $\exp\begin{pmatrix}0&-\theta\\ \theta&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix}0 & -(\theta+2\pi)\\ \theta+2\pi & 0\end{pmatrix}$

Notation 31 : Pour $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{C}[C] = \{P(C) \mid P\in\mathbb{C}[X]\}$.

Lemme 32 : (théorème d'inversion locale) Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert, $a\in U$, $f : U\to\mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tq : $d_af\in GL(\mathbb{R}^n)$.
Alors : $\exists V\in\mathcal{V}_a \mid \exists W\in\mathcal{V}_{f(a)} \mid f : V\to W$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Théorème 33 : $\exp : \begin{array}{l}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})\\ C\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{C^k}{k!}\end{array}$ est surjective.

3) Bijection entre sous-ensembles matriciels

XXIII.4 [Rom]

Notation 34 : On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ celui des matrices unipotentes (i.e. telles que $A-I_n$ nilpotente)

Définition 35 : Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A)<1$, on peut définir $\ln(I_n+A) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k$

Exemple 36 : (1) Si $A = O_n$, $\ln(I_n) = O_n$
(2) Si A est nilpotente d'indice q, $\ln(I_n+A) = \sum_{k=1}^{q-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k$

Lemme 37 : Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A)<1$, on a : $\exp[\ln(I_n+A)] = I_n + A$

Lemme 38 : Pour $A\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A)\in\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $\ln(\exp(A)) = A$

Théorème 39 : exp réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.

Corollaire 40 : $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*, \forall A\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C}), \exists X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(X) = \lambda I_n + A$

[H2G2]

Théorème 41 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Lemme 42 : (théorème de décomposition polaire) Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$.
Alors : $\exists! S,O\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid A = OS$

Définition 43 : Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$, $I_{(p,q)} = \begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}\in GL_{p+q}(\mathbb{R})$. On note
$\mathcal{O}(p,q) = \{M\in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M I_{(p,q)} {}^tM = I_{(p,q)}\}$

Application 44 : Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$.
Alors : $\mathcal{O}(p,q)$ et $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})\times\mathcal{O}_q(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes.

III) Application aux équations différentielles

1) Système différentiel linéaire à coefficients constants

II.4 [Ber]

Lemme 45 : $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

Théorème 46 : Soit $t_0\in\mathbb{R}$, $y_0\in\mathbb{K}^N$ et $(\mathcal{E}_H)$: $\begin{cases}y' = Ay\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$
Alors : la solution de $\mathcal{E}_H$ est : $y(t) = y_0 e^{(t-t_0)A}$.

[Ber] II.5

Exemple 47 : La solution de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \\ x(1) = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ est :

$x(t) = \frac{1}{2}\left[3e^{3(t-1)} + e^{-(t-1)}\right]$ $y(t) = \frac{1}{2}\left[3e^{3(t-1)} - e^{-(t-1)}\right]$

2] Cas des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

On considère ici $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et le système $y' = Ay$

[Ber] V.4

Proposition 48 : Si A a deux valeurs propres réelles $\mu \neq \lambda$ de vecteurs propres e_μ, e_λ associés.

Alors : $y(t) = C_1 e^{\lambda t} e_\lambda + C_2 e^{\mu t} e_\mu$

Corollaire 49 : Dans ce cas,

(1) Si $0 < \lambda < \mu$, alors O est un point d'équilibre instable

(2) Si $\lambda < \mu < 0$, alors O est un point d'équilibre asymptotiquement stable

(3) Si $\lambda < 0 < \mu$, alors O est un point col

Proposition 50 : Si A a deux valeurs propres complexes $\lambda, \bar{\lambda}$, soit v_1, v_2 vecteurs propres associés

Alors : $y(t) = c e^{\lambda t} v_1 + \bar{c} e^{\bar{\lambda} t} v_2$

Corollaire 51 : Dans ce cas, en coordonnées polaires, la trajectoire est décrite par des spirales logarithmiques.

Proposition 52 : Si A a une unique valeur propre réelle

Alors : (1) Si A est diagonalisable, alors les trajectoires sont des demi-droites partant de l'origine

(2) Si A n'est pas diagonalisable, alors O est un point dégénéré stable ou instable.

3] Stabilité d'un système différentiel par un système linéaire

[Ber] VI.2

Théorème 53 : (de stabilité) Soit (λ_j) les valeurs propres de A.

Alors : les solutions de $y' = Ay$ sont :

(1) stables ssi $\forall j$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou ($Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable)

(2) asymptotiquement stable ssi $\forall j$ $Re(\lambda_j) < 0$

[Sen]

Lemme 54 : Soit $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres de partie réelle strictement négatives.

Alors : $\exists \alpha > 0 \mid \exists \lambda > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}$, $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$

Théorème 55 : (de Liapounov) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f$ a à toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Alors : O est point d'équilibre stable du système $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et Géométrie - Rombaldi

[Zad] Un max de maths - Zavidovique

[H2G2] Histoires hédonistes de groupes et géométries - Caldero

[Ber] Équations différentielles - Berthelin

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann