154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou par une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ corps, $n\in\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit F sous-espace vectoriel de E.

I] Sous-espaces stables par un endomorphisme

1] Sous-espaces stables et endomorphismes induits

[Man] II.2

Définition 1: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u si $u(F)\subseteq F$.

Exemple 2: Pour tout $u\in\mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par u.

Proposition 3: Soit $u,v\in\mathcal{L}(E)$ et F sous-espace stable par u et v.
Alors: F est stable par $u+v$ et $u\circ v$.
Si de plus, v est un automorphisme de E, alors $v(F)$ est un sous-espace stable par $v\circ u\circ v^{-1}$.

Exemple 4: Soit $R_{u,\theta}$ rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe u, d'angle θ et soit $f\in O_3(\mathbb{R})$. Alors $f\circ R_{u,\theta}\circ f^{-1}$ a pour axe la droite $f(u)$.

II.3

Définition 5: Soit F sous-espace stable par $u\in\mathcal{L}(E)$. On appelle endomorphisme induit par u sur F l'endomorphisme $u_F: F\to F$ tel que pour tout $x\in F$, $u_F(x)=u(x)$.

Proposition 6: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et F sous-espace stable par u.
Alors: $\pi_{u_F} \mid \pi_u$ et $\chi_{u_F}\mid\chi_u$

Proposition 7: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, $E=F\oplus G$ deux sous-espaces stables par u.
Alors: $\pi_u = \mathrm{PPCM}(\pi_{u_F};\pi_{u_G})$

2] Noyaux stables et décomposition de Dunford

[Rom] XIX.4

Lemme 8: Soit $p\geq 2$, $P_1,\dots,P_r \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ et $(Q_i = \prod_{k\neq i} P_k)_{i=1}^r$ tels que les (P_i) sont deux à deux premiers entre eux.
Alors: (Q_i) sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k\in[\![1;r]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Théorème 9: (décomposition des noyaux) Soit $(P_i)_{i=1}^p\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ deux à deux premiers entre eux et $P=\prod_{k=1}^p P_k$. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$.
Alors: $\ker(P(u))=\bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u))$ et les projecteurs $(\pi_k : \ker(P(u))\to\ker(P_k(u)))_{k=1}^p \in \mathbb{K}[u]$.

XIX.5 [Rom]

Définition 10: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $\pi_u(X)=\prod_{k=1}^p (X-\lambda_k)^{\beta_k}$ scindé et polynôme caractéristique $\chi_u(X)=\prod_{k=1}^p(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$. On appelle sous-espaces caractéristiques de u les sous-espaces vectoriels $\ker(u-\lambda_k id)^{\alpha_k}$.

Théorème 11: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ comme précédemment, soit $P(X)=\prod(X-\lambda_k)^{m_k}$ polynôme annulateur de u et $(N_k := \ker(u-\lambda_k id)^{m_k})_{k=1}^p$
Alors: (1) $E=\bigoplus_{k=1}^p N_k$ (2) $N_k=\ker(u-\lambda_k id)^{\beta_k}$
(3) N_k est stable par u et λ_k est la seule vp de la restriction de u à N_k
(4) $\dim(N_k)=\alpha_k$ (5) $(u-\lambda_k id)_{|N_k}$ est nilpotente d'indice β_k

Théorème 12: (de décomposition de Dunford) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
Alors: il existe un unique couple $(d,n)\in\mathcal{L}(E)$ avec d diagonalisable n nilpotente, $d\circ n=n\circ d$ et $u=d+n$.
De plus, $d,n\in\mathbb{K}[u]$

Corollaire 13: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors: il existe un unique $(D;N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D diagonalisable, N nilpotente, $DN=ND$, $A=D+N$ et $D,N\in\mathbb{K}[A]$.

Exemple 14: Soit $A=\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}$.
▲ Si $a=b$, alors $D=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford.
▲ Si $a\neq b$, alors $D=\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford.

3] Codiagonalisation et cotrigonalisation

[Rom] XXI.2 XXI.6

Théorème ~~Définition~~ **15:** Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathcal{L}(E)$ trigonalisables tels que $u_i\circ u_j=u_j\circ u_i$.
Alors: il existe une base commune de trigonalisation pour (u_i).

Théorème 16: Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathcal{L}(E)$ diagonalisables
Alors: il existe une base commune de diagonalisation pour (u_i) ssi pour tout i,j, $u_i\circ u_j=u_j\circ u_i$

4] Description de $SO_3(\mathbb{R})$ par les quaternions

[Isen]

Définition 17 : Le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par $1, i, j, k$ tels que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.
Pour un quaternion q, on note $N(q) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ sa norme.
On note $Im(\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H} \mid Re(q) = 0\}$ et $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$.

Propriétés 18 : Soit $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ et $q = a + ib + jc + kd$
Alors : (1) $2Re(q) = q + \bar{q}$ et $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$
(2) $N(q)^2 = q\bar{q}$
(3) $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ et $Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}$

Lemme 19 : La sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.
En particulier, $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Théorème 20 : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Théorème 21 : $SO_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à $Sp(1)/\{\pm 1\}$.

II] Sous-espaces stables par la transposée d'un endomorphisme

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1] Transposée d'une application linéaire

XIX.5 [Rom]

Définition 22 : La transposée de $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est : ${}^t u \in F^* \to E^*$ telle que pour tout $\varphi \in F^*$, ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$

Proposition 23 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E;F)$, ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*; E^*)$

Théorème 24 : L'application $\begin{array}{l} \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(F^*;E^*) \\ u \mapsto {}^t u \end{array}$ est linéaire, injective.

Théorème 25 : Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(F;G)$
Alors : (1) ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$ (2) Si $E = F$, alors ${}^t id_E = id_{E^*}$
(3) si u est un isomorphisme, alors ${}^t u$ aussi et $({}^t u)^{-1} = {}^t u^{-1}$
(4) $\ker({}^t u) = Im(u)^{\perp}$ et $Im({}^t u) = \ker(u)^{\perp}$
(5) u est surjective (resp. injective) ssi ${}^t u$ est injective (resp. surjective)

2] Application à la réduction de Jordan

[Rom] XXI.3

Lemme 26 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'ordre $q \geq 1$.
Alors : ${}^t u$ est nilpotente d'ordre q

XXI.3 [Rom]

Lemme 27 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'ordre $q \geq 1$.
Alors : pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{k=0}^{q-1}$ est libre et $F := Vect(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u.

Lemme 28 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'ordre $q \geq 1$.
Alors : il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F := Vect\{x; u(x); \dots; u^{q-1}(x)\}$ et $G = [Vect(\varphi; {}^t u(\varphi); \dots; ({}^t u)^{q-1}(\varphi))]^{\perp}$ sont stables par u et vérifient $E = F \oplus G$.

Théorème 29 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'ordre $q \geq 1$.
Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ et chaque sous-espace vectoriel $E_i = Vect(\mathcal{B}_i)$ est stable par u et $Mat_{\mathcal{B}_i}(u_{|E_i}) = J_i := \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 30 : (de réduction de Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tel que $\chi_u(X) = \prod (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix}$
avec $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & \\ 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_{k,i} \in \{0;1\}$.

Remarque 31 : Ce théorème s'applique automatiquement dès lors que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

Application 32 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A et ${}^t A$ sont semblables.

III] Sous-espaces cycliques

1] Matrice compagnon et endomorphismes cycliques

Annexe B [GouAl]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

Définition 33 : Soit $x \in E$ et π_x le polynôme unitaire tel que $\langle \pi_x \rangle = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Proposition 34 : Soit $x \in E$.
Alors : E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\deg(\pi_x)$ et une base est : $\{x; \dots; f^{\deg(\pi_x)-1}(x)\}$.

Proposition 35 : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_f$

[GouAl] Annexe B

Définition 36: On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$. Soit $P(X) = X^p + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de P : $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Proposition 37: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique.
Alors: il existe une base $\mathcal{B}$ de E où : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C(\pi_f)$

2] Invariants de similitude

Annexe B [GouAl]

Théorème 38: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors: il existe $F_1; \dots; F_r$ sous-espaces vectoriels de E stables par f tels que $E = \bigoplus F_i$, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $f_i := f_{|F_i}$ est cyclique et $\pi_i := \pi_{f_{|F_i}}$ vérifie pour tout $i \in [\![1;r-1]\!]$, $\pi_{i+1} \mid \pi_i$

Remarque 39: La suite des π_i ne dépend que de f et non de la décomposition.

Définition 40: Les π_i sont appelés invariants de similitude de f.

Théorème 41: (de réduction de Frobenius) Soit $\pi_1; \dots; \pi_r$ la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$
Alors: il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} C(\pi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi_r) \end{pmatrix}$

Corollaire 42: $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude

IV] Sous-espaces stables par l'adjoint d'un endomorphisme

1] Notion d'adjoint

Soit maintenant E espace euclidien muni d'un produit scalaire

XXII.2 [Rom]

Théorème 43: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
Alors: il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$,
$$\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$

Définition 44: On dit que u^* est l'adjoint de u.

Théorème 45: Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base de E, $G = (\langle e_i \mid e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de Gram correspondante, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Alors: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = G^{-1}\,{}^tA\,G$ et si $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$

XXII.2 [Rom]

Proposition 46: Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$
Alors: $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$; $(u^*)^* = u$; $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$; $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$
$\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$; $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$; $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$

2] Réduction des endomorphismes normaux

XXII.10 [Rom]

Définition 47: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

Exemples 48: $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ sont des ensembles d'endomorphismes normaux.

Lemme 49: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F sous-espace vectoriel de E stable par u
Alors: $F^\perp$ stable par u

Lemme 50: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors: il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u

Lemme 51: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors: il existe des sous-espaces vectoriels de E : $P_1; \dots; P_r$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tel que $E = \bigoplus P_i$

Théorème 52: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors: il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$ avec D_p matrice diagonale,
$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ et $a_k \neq 0$ tels que $p + 2r = n$.

Références :

[Man] Algèbre linéaire Réduction des endomorphismes – Mansuy
[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie – Rombaldi
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques – Isenmann