153

Polynômes d'endomorphismes. Réduction d'endomorphismes. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathrm{End}(E)$.

I] Polynômes d'endomorphismes

1] Algèbre et polynôme minimal

XIX.1 [Rom]

Notation 1: Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ avec $u^k = u \circ \dots \circ u$.

Définition 2: On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ engendrée par u.

Exemple 3: Si $u^2 = u$ est un projecteur, alors on a : $\mathbb{K}[u] = \{au + b\,id_E \mid a, b \in \mathbb{K}\}$

Remarque 4: $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative i.e. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$

Notation 5: De même, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ et alors $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$.

Remarque 6: Comme $\mathrm{End}(E)$ est de dimension n^2, on a :
$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n^2$$

XIX.2

Proposition 7: L'ensemble $I_u := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et il existe un unique $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, appelé polynôme minimal de u tel que $I_u = \langle \pi_u \rangle$.

Exemple 8: Si u est nilpotent d'indice q, alors $\pi_u = X^q$.

Lemme 9: Soit F sous-espace de E stable par u, $v = u_{|F}$.
Alors: $\pi_v \mid \pi_u$

Théorème 10: Soit $P \in I_u$.
Alors: $\mathrm{Sp}(u) \subseteq P^{-1}(\{0\})$ et $\mathrm{Sp}(u) = \pi_u^{-1}(\{0\})$

Théorème 11: $\mathbb{K}[u]$ est de dimension $\deg(\pi_u)$ de base $(u^k)_{k=0}^{\deg(\pi_u)-1}$

Théorème 12: $\mathbb{K}[u]$ est un corps ssi $\mathbb{K}[u]$ est intègre ssi π_u est irréductible

XIX.3 [Rom]

2] Polynômes caractéristiques et valeurs propres

Définition 13: On appelle polynôme caractéristique de u $\chi_u(X) = \det(X\,id_E - u)$.

Remarque 14: χ_u est unitaire et $\deg(\chi_u) = n$.

Exemple 15: Si $u = \lambda\, id_E$, alors $\chi_u = (X - \lambda)^n$.

Définition 16: Soit $x \in E$. On note $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ idéal de générateur unitaire $\pi_{u,x}$: $I_{u,x} = \langle \pi_{u,x} \rangle$.

Lemme 17: $E_{u,x} = \mathrm{Vect}(u^k(x) \mid k \in \mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\deg(\pi_{u,x})$ de E stable par u et $\pi_{u_{|E_{u,x}}} = \pi_{u,x}$ et $\chi_{u_{|E_{u,x}}} = (-1)^{\deg(\pi_{u,x})} \pi_{u,x}$

Théorème 18: (de Cayley-Hamilton) $\chi_u(u) = 0$.

Remarque 19: $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$

Corollaire 20: $\pi_u \mid \chi_u$ et $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) \leq n$.

XIX.4 [Rom]

3] Lemme des noyaux

Lemme 21: Soit $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ deux à deux premiers entre eux et $\left(Q_k = \prod_{j \neq k} P_j\right)_{k=1}^{p}$
Alors: les Q_k sont premiers entre eux et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Théorème 22: (lemme des noyaux) Soit $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^{p} P_k$.
Alors: $\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(P_k(u))$ et les projecteurs $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\pi_k : \ker(P(u)) \to \ker(P_k(u)) \in \mathbb{K}[u]$.

Remarque 23: Ce théorème est valable en dimension infinie.

Corollaire 24: En notant $\pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\beta_k}$ sa décomposition en irréductibles, on a : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(P_k^{\beta_k}(u))$

II] Applications de la réduction d'endomorphismes

1] Trigonalisation, diagonalisation et décomposition de Dunford

XIX.4 [Rom] XIX.5

Théorème 25 : u est diagonalisable ssi il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u)=0$ ssi π_u est scindé à racines simples.

Exemple 26 : Un projecteur est diagonalisable puisqu'il est annulé par X^2-X.

Théorème 27 : u est trigonalisable ssi il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé tel que $P(u)=0$ ssi π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 28 : Si π_u est scindé,
Alors : $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{\alpha(\lambda)}$ et $Tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{\alpha(\lambda)}$

Corollaire 29 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme $u \in End(E)$ est trigonalisable.

Exemple 30 : Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, tout endomorphisme est trigonalisable.

Théorème 31 : Soit $P = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{K}[X]$, $N_k = \ker(u-\lambda_k id)^{m_k}$
Alors : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$; $N_k = \ker(u-\lambda_k id)^{\beta_k}$ avec β_k la multiplicité de λ_k comme racine de π_u ; N_k est stable par u et λ_k est la seule valeur propre de $u_{|N_k}$; $\dim(N_k) = \alpha_k$ avec α_k multiplicité de λ_k dans χ_u ; $(u-\lambda_k id)_{|N_k}$ est nilpotente d'indice β_k.

Lemme 32 : Avec les notations précédentes, $\forall k \in [\![1;p]\!]$, le projecteur π_k de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k} N_j$ est un polynôme en u.

Théorème 33 : (décomposition de Dunford) Si χ_u est scindé
Alors : $\exists!(d;n) \in End(E) \mid d$ diagonalisable, n nilpotente, $d \circ n = n \circ d$ et tels que $u = d+n$. De plus, $d, n \in \mathbb{K}[u]$.

XIX.5 [Rom]

Corollaire 34 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé.
Alors : $\exists!(D;N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid D$ diagonalisable, N nilpotente, $N \circ D = D \circ N$ et $A = D+N$. De plus, $D, N \in \mathbb{K}[A]$.

Exemple 35 : La décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ n'est pas $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $a \neq b$ mais plutôt : $D = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = O_2$ car D est diagonalisable !

2] Presque ortho-diagonalisation des endomorphismes normaux

XXII.10 [Rom]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Théorème 36 : $\forall u \in End(E), \exists! u^* \in End(E) \mid \forall x,y \in E, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$

Définition 37 : Un endomorphisme $u \in End(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Lemme 38 : Soit $u \in End(E)$ normal, F sous-espace stable par u.
Alors : $F^\perp$ est stable par u

Lemme 39 : $\forall u \in End(E)$, $\exists P$ sous-espace de E, $\dim(P) \in \{1;2\}$ stable par u

Lemme 40 : Soit $u \in End(E)$ normal.
Alors : $\exists P_1, \dots, P_r$ sous-espaces de E de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tels que : $E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$.

Théorème 41 : Soit $u \in End(E)$ normal.
Alors : $\exists \mathcal{B}$ base orthonormée de E où : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix}$ avec D_p diagonale, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$ et $p+2r=n$.

3] Invariants de similitude et réduction de Frobenius

Ann B [GouAl]

Notation 42 : Soit $x \in E$. On note $\pi_{u,x}$ le polynôme unitaire engendrant $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$, $E_x = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

Proposition 43 : il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$

Définition 44 : On dit que u est cyclique si il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$.

Ann. B

Remarque 45 : u cyclique ssi $\deg(\pi_u)=n$ ssi $\pi_u = \chi_u$.

Proposition 46 : Soit $u \in End(E)$ cyclique.
Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ de E où $Mat_{\mathcal{B}}(u) = C(\pi_u)$ matrice compagnon.

[GouA1]

Théorème 47 : Il existe $F_1, \dots, F_r$ sous-espaces de E stables par u :
(i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
(ii) $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $u_i = u_{|F_i}$ est cyclique
(iii) $\forall i \in [\![1;r-1]\!]$, $\pi_{i+1} \mid \pi_i$

Les $\pi_1, \dots, \pi_r$ sont appelés les invariants de similitude de u

Remarque 48 : $\pi_1 = \pi_u$ et $\chi_u = \pi_1 \times \dots \times \pi_r$

Théorème 49 : (de réduction de Frobenius) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C(\pi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi_r) \end{pmatrix}$

Corollaire 50 : $u, v \in End(E)$ sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

III) Utilisation des polynômes d'endomorphismes

1) Calcul d'inverses et de puissances

I.4

Proposition 51 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)=0$ et $P(0)=a_0 \neq 0$.
Alors : $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exemple 52 : Si $(u-2id_E)\circ(u-3id_E)=0$ et u n'est pas une homothétie, **alors** : $u^{-1} = -\frac{1}{6}(u-5id_E)$.

[Rou]

Corollaire 53 : $u \in GL(E)$ ssi $0 \notin \pi_u^{-1}\{0\}$

Proposition 54 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)=0$, $\deg(P)=d$.
Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k \in Vect((u^i)_{i=0}^{d-1})$.

Exemple 55 : Soit $P=(X-a)(X-b)$ avec $P(u)=0$, alors on a :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k = \frac{a^k-b^k}{a-b} u + \frac{ba^k-ab^k}{b-a} id_E$

[Isen]

Application 56 : Soit P polygône de sommets $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et $P_0 = P$, $\forall k \in \mathbb{N}$, P_{k+1} le polygône de sommets les milieux des arêtes de P_k.
Alors : (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.

2) Calcul d'exponentielles de matrices

XXIII

Théorème 57 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

[Rou]

Proposition 58 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable $A = PDP^{-1}$
Alors : $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ avec $\exp(D) = diag(d_{1,1}, \dots, d_{n,n})$.

Exemple 59 : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, $\exp(A_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Proposition 60 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de décomposition de Dunford : $A = D+N$.
Alors : $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ et la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est : $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)[\exp(N) - I_n]$.

[Zod]

Lemme 61 : (théorème d'inversion locale) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1$ tel que $d_a f \in GL(\mathbb{R}^n)$.
Alors : $\exists V \in \mathcal{V}_a \mid \exists W \in \mathcal{V}_{f(a)} \mid f : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

Théorème 62 : $\exp : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}) \\ C \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C^k}{k!} \end{array}$ est surjective.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie — Rombaldi
[GouAl] Les maths en tête Algèbre — Gourdon
[Man] Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes — Mansuy
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques — Isenmann
[Zad] Un max de maths — Zavidovique