P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 265. Exemple d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Devs :

- Fonction Gamma
- Théorème Central Limite

Références :

1. Rudin, Analyse réelle et complexe
2. Zuily-Quéfflélec, Analyse pour l'agrégation
3. Barbe-Ledoux, Probabilités
4. Foata-Fuchs, Calcul des probabilités
5. Ouvrard, Probabilités 2
6. Cadre-Vial, Statistique mathématique
7. Arnaudière, Fraysse : Cours de mathématiques 1
8. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
9. Ramis-Warusfel, Tout en un L1 (ou n'importe quel livre de L1 Analyse)

Le rapport du jury de l'année 2020 explique que cette leçon peut être motivée par un fil conducteur de notre choix. Nous choisirons donc ici de la traiter d'un point de vue probabiliste, voire statisticien, en lien avec certaines thématiques de l'option A.

1 Fonctions usuelles et propriétés

1.1 La fonction exponentielle

Proposition 1. *Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. En tant que série de fonctions, elle converge uniformément sur tout sous-ensemble borné du plan complexe.*

Corollaire 2. *La fonction $\exp\colon z \mapsto \sum \frac{z^n}{n!}$ est définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$, et elle est continue sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs, elle vérifie $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.*

Proposition 3. *La fonction $\exp$ est entière (holomorphe sur le plan complexe), et elle vérifie $\exp'(z) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Proposition 4.

- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) \neq 0$.*
- *La restriction de l'exponentielle à $\mathbb{R}$ est une fonction positive strictement croissante, qui vérifie*
$$\exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad et \quad \exp(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- *Il existe un nombre positif π tel que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et tel que $e^z = 1$ si et seulement si $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.*
- *La fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.*
- *L'application $t \mapsto e^{it}$ est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.*
- *L'exponentielle $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.*

Proposition 5. *(Croissance comparée)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Corollaire 6. *La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

1.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Définition 7. *On définit les fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{C}$ par*
$$\cos(z) := \mathrm{Re}(\exp(z)) \quad et \quad \sin(z) = \mathrm{Im}(\exp(z)).$$

Proposition 8. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad et \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposition 9. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ restreintes à $\mathbb{R}$ sont 2π-périodiques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifient $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Proposition 10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.*

Proposition 11. *(formules d'Euler)*

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

Proposition 12. *(formule de Moivre)*

On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$: $\cos(nx)+i\sin(nx)=e^{inx}$.

Proposition 13. *Soit* $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ix}$ *et* $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$ *les noyaux de Dirichlet et de Féjer. On a :*

$$D_n(x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } F_n(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Application 14. (Théorème de Féjer)

Pour tout $f\in\mathcal{C}_0(\mathbb{T})$, la somme partielle de ses coefficients de Fourier $S_N(f)$ définie sur $\mathbb{T}$ par $S_N(f)(t)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\,e^{int}=(f*D_N)(t)$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f.

Définition 15. *On appelle cosinus hyperbolique, et sinus hyperbolique, les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *suivantes*

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad \text{et } \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Proposition 16. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *on a* $\cos h^2(x)-\sin h^2(x)=1$.

Les fonctions $\cos h$ *et* $\sin h$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$, *et vérifient* $\cosh'(x)=\sinh(x)$ *et* $\sinh'(x)=\cosh(x)$.

Proposition 17. *Les fonctions* cosh *et* sinh *admettent le développement en série*

$$\cosh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \text{et}\quad \sinh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1.3 Réciproques des fonctions usuelles

Définition 18. *On appelle logarithme népérien et on note* ln *la fonction réciproque de l'exponentielle réelle, définie sur* $]0,+\infty[$. *Elle vérifie donc* $\exp(\ln(x))=x$ *pour* $x>0$ *et* $\ln(\exp(x))=x$ *pour* $x\in\mathbb{R}$.

Proposition 19. *La fonction* ln *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0,+\infty[$, *et sa dérivée est* $x\mapsto\frac{1}{x}$. *On a* $\ln(1)=0$, $\ln(e)=1$ *et pour tout* $x,y\in]0,+\infty[$, $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.

Proposition 20. *Les fonctions cosinus et sinus sont bijectives sur les intervalles respectifs* $[0,\pi]$ *et* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. *On définit leurs réciproques* arccos: $[-1,1]\to[0,\pi]$ *et* arcsin: $[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction arccos *est strictement décroissante sur* $[0,\pi]$. *La fonction* arcsin *est impaire et strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 21. *Les fonctions arccos et arcsin sont dérivables sur* $]-1,1[$, *de dérivées respectives*

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \text{et}\quad \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposition 22. *La fonction* sinh *est croissante sur* $\mathbb{R}$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *La fonction* cosh *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *à valeurs dans* $[1,+\infty[$.

On appelle argument du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique, et l'on note arg sinh *et* arg cosh *les réciproques des fonctions* sinh *et* cosh *sur* $\mathbb{R}$, *respectivement sur* $\mathbb{R}_+$.

Proposition 23. *Les fonctions argsinh et argcosh sont dérivables sur* $\mathbb{R}$, *respectivement sur* $[1,+\infty[$ *et leurs dérivées vérifient*

$$\operatorname{argsinh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\quad \text{et}\quad \operatorname{argcosh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2 Fonctions spéciales et lois de probabilités associées

2.1 La fonction Gamma d'Euler

Définition 24. *On définit la fonction* Γ *d'Euler par* $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ *sur* $]0,+\infty[$.

Proposition 25. *La fonction* Γ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0,+\infty[$. *Elle vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall x>0\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
- $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \Gamma(n)=(n-1)!$
- $\Gamma(1)=1$ *et* $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Définition 26. *Soit* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $\lambda,p>0$. *Une variable aléatoire* X *sur* Ω *à valeurs dans* $[0,+\infty[$ *est dite de loi* $\Gamma(p,\lambda)$ *si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet pour densité*

$$f(x)=\frac{\lambda}{\Gamma(p)}e^{-\lambda x}(\lambda x)^{p-1}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

En particulier, pour $p=1$, on retrouve la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 27. *Soit* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *suivant une loi* $\Gamma(p,\lambda)$.

Alors $\mathbb{E}[X]=\frac{p}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X)=\frac{p}{\lambda^2}$, *et la fonction caractéristique de* X *vérifie*

$$\forall u\in]-\infty,\lambda[\qquad \Phi_X(u)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbb{E}[e^{uX}]=\left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^p.$$

Proposition 28. *Soit* (X_1,X_2) *est un couple de variables aléatoires indépendantes de lois marginales respectives* $\Gamma(p_1,\lambda_1)$ *et* $\Gamma(p_2,\lambda_2)$, *et* $\mu>0$. *Alors*

- X_1+X_2 *a pour loi* $\Gamma(p_1+p_2,\lambda)$.
- μX_1 *a pour loi* $\Gamma\left(p_1,\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Proposition 29. *Soit* $(X_1,\ldots,X_n)$ *des variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre* $\lambda>0$. *Alors* $X_1+\cdots+X_n$ *a pour loi* $\Gamma(n,\lambda)$.

Théorème 30. *(Holomorphie sous l'intégrale)*

Soit $f\colon\begin{cases} X\times\Omega & \to \mathbb{C}\\ (t,z) & \mapsto f(t,z)\end{cases}$ *une fonction vérifiant*

- *Pour tout* $z\in\Omega$, $t\mapsto f(t,z)$ *est intégrable sur* X.
- *Pour presque tout* $t\in I$, $z\mapsto f(t,z)$ *est holomorphe sur* Ω.
- *Il existe* $g\in L^1(X)$ *telle que* $\left|\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\right|\leq g(t)$ *pour tout* $z\in\Omega$ *et pour presque tout* $t\in X$.

Alors la fonction $F\colon z\mapsto\int_X f(t,z)\,d\mu(t)$ *est holomorphe sur* Ω *et on a*

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(z)=\int_X\frac{\partial^n}{\partial z^n}f(z,t)\,d\mu(t).$$

Développement 1 :

Théorème 31. *La fonction* Γ *est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré* $\Omega_0=\{\mathrm{Re}>0\}$.

Elle se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, *et* $\frac{1}{\Gamma}$ *est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler*

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad \frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z\cdot n!}.$$

2.2 La fonction Bêta d'Euler

Définition 32. *On définit la fonction bêta d'Euler sur* $]0,+\infty[^2$ *par*

$$\forall r,s>0\qquad B(r,s)=\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx.$$

Proposition 33. *La fonction bêta est liée à la fonction gamma via la formule*

$$\forall r,s>0\quad B(r,s)=\frac{\Gamma(r)\,\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

En particulier, on en déduit que B *est symétrique :* $B(r,s)=B(s,r)$ *pour tout* $r,s>0$.

Définition 34. *Une variable aléatoire sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *à valeurs dans* $[0,1]$ *est dite de loi* $B(r,s)$ *(loi bêta de paramètres* $r>0$ *et* $s>0$*) si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet pour densité :*

$$f(x)=\frac{1}{B(r,s)}x^{r-1}(1-x)^{s-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

En particulier, pour $r=1$ *et* $s=1$, *on retrouve la loi uniforme sur* $[0,1]$.

Proposition 35. *Soit* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *suivant une loi* $B(r,s)$. *Alors*

$$\mathbb{E}[X]=\frac{r}{r+s}\quad\text{et}\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

On en déduit que $\mathrm{Var}(X)<\mathbb{E}[X](1-\mathbb{E}[X])$.

Proposition 36. *Soit* $(X_1,\ldots,X_n)$ *un système de* n *variables aléatoires indépendantes, toutes de loi uniforme sur* $[0,1]$. *Alors les variables aléatoires* $Y=\min(X_1,\ldots,X_n)$ *et* $Z=\max(X_1,\ldots,X_n)$ *sont de loi respective* $B(1,n)$ *et* $B(n,1)$.

2.3 Fonctions gaussiennes

Définition 37. *Une variable aléatoire* X *sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est dite de loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$ *si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet pour densité*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Proposition 38. *La fonction* f *définie précédemment est paire, et admet un maximum en* $x=0$ *qui vaut* $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. *Par ailleurs,* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et on a* $f''(x)=0$ *si et seulement si* $x=\pm1$.

Définition 39. *On désigne par* Φ *la fonction de répartition de* X *:*

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

Proposition 40. *La fonction* Φ *est paire, symétrique par rapport au point* $(0,1/2)$ *et la pente de sa tangente en ce point vaut* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Proposition 41. *On a* $\mathbb{E}[X]=0$ *et* $\mathrm{Var}(X)=1$.

Définition 42. *Soit* $\mu\in\mathbb{R}$ *et* $\sigma>0$. *Alors la variable aléatoire* $Y=\mu+\sigma X$ *suit une loi dite normale de paramètres* μ *et* σ^2, *notée* $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. *Elle vérifie* $\mathbb{E}[Y]=\mu$ *et* $\mathrm{Var}(Y)=\sigma^2$, *et sa densité est donnée par*

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

3 Applications probabilistes et statisticiennes

3.1 Une inégalité de grandes déviations

Proposition 43. *Soit* X *une variable aléatoire réelle intégrable sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. *On suppose que* $|X|\leq 1$ $\mathbb{P}$*-presque sûrement, et que* $\mathbb{E}[X]=0$.

Proposition 44. *Pour tout* $t\in\mathbb{R}$, $e^{tX}\in L^1$ *et on a* $\mathbb{E}[\exp(tX)]\leq\cosh(t)$.

Remarque 45. On déduit du développement en série entière de cosh (proposition 19) l'inégalité

$$\mathbb{E}[\exp(tX)]\leq\exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Théorème 46. *(Inégalité de Hoeffding)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur* Ω. *On suppose que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, X_n *est* $\mathbb{P}$*-presque sûrement bornée par une constante* $c_n>0$, *intégrable et d'espérance nulle. On note* $S_n=\sum_{i=1}^n X_j$

Pour tout $\varepsilon>0$, *on a*

$$\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right).$$

Application 47. Soit $(\mathcal{H}^n,\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique, avec $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}$ et $\Theta\subset\mathbb{R}$. On veut estimer le paramètre $g(\theta)$ avec $g\colon\Theta\to\mathbb{R}$ continue. Si $(X_1,\ldots,X_n)$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi P_θ, bornées P_θ-p.s et avec $\mathbb{E}[X_1]=g(\theta)$, alors

$$I_\alpha=\left[\overline{X_n}-c\sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)},\overline{X_n}+c\sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$$

est un intervalle de confiance pour $g(\theta)$ au niveau $1-\alpha$, où c est une borne p.s de $X_1-g(\theta)$.

3.2 Théorème central limite

Proposition 48. *Soit* X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *suivant une loi normale centrée réduite. Alors la fonction caractéristique* φ_X *de* X *vérifie*

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad\varphi_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Développement 2

Théorème 49. *(Théorème central limite)*

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. *On suppose que* $X_0\in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *et on note* $\sigma^2=\mathrm{Var}(X_0)$ *et* $\mu=\mathbb{E}[X_0]$. *On suppose de plus que* $\sigma^2>0$.

Par hypothèse, on a donc $X_n\in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$ *et* $\mathbb{E}[X_n]=\mu$*pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

On note également $S_n=X_1+\cdots+X_n$ *pour tout* $n\geq 1$.

On a alors la convergence en loi

$$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}\mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Application 50. (En statistiques)

On considère le modèle statistique $(\{0,1\}^n,\{\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}\}_{\theta\in]0,1[})$ du jeu de pile ou face. Alors l'estimateur des moments $\overline{X_n}$ construit avec le n-échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ est asymptotiquement normal, de vitesse $\sqrt{n}$, car le théorème central limite donne :

$$\sqrt{n}\,(\overline{X_n}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\to}\mathcal{N}(0,\theta(1-\theta)).$$

Théorème 51. *(δ-méthode, **Admis**)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires d'espérence* θ *et de variance* σ^2.

Soit $\overline{X_n}$ *un estimateur de* θ.

On suppose que

$$\sqrt{n}\,(\overline{X_n}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}\mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Alors pour toute fonction $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $g'(\theta)\neq 0$ *on a*

$$\sqrt{n}\,(g(\overline{X_n})-g(\theta))\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}\mathcal{N}(0,\sigma^2(g'(\theta))^2).$$