P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 262. Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Devs :

- Convergence presque sûre des sous-martingales bornées dans L^1
- Théorème Central Limite

Références :

- Barbe-Ledoux, Probabilités
- Ouvrard, Probabilités 2
- Hauchecorne, Contre-exemples en mathématique
- Garet, Probabilités et processus stochastiques
- Cadre-Vial, Statistique mathématique

Dans ce qui suit, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ désigne une variable aléatoire.

1 Autour des différentes convergences d'une suite de variables aléatoires

1.1 Convergence presque sûre

Définition 1. *On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers X si*

$$\mathbb{P}\Big(\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X$, ou $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-}p.s}{\to}} X$.

Proposition 2. *La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers X si et seulement si*

$$\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geq 0} \bigcup_{n\geq N} \left\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Théorème 3. *(Lemme de Borel Cantelli)*

- *On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(|X_n - X| > \frac{1}{k}\Big) < \infty$. Alors $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-}p.s}{\to}} X$.*
- *Si de plus, les X_n sont mutuellement indépendants, alors $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-}p.s}{\to}} 0$ si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(|X_n| > \frac{1}{k}\Big) < \infty$ pour tout $k \geq 0$.*

Proposition 4. *(Critère de Cauchy)*
La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement si et seulement si

$$\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \left\{|X_n - X_m| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1.$$

Exemple 5. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$. On pose $U_n = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-i} X_i$. Alors $(U_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire U à valeurs dans $[0,1]$.

Théorème 6.
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers X, alors $(f(X_n))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $f(X)$.

1.2 Convergence en probabilité

Définition 7. *On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X en probabilité si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Dans ce cas, on note $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$.

Les inégalités suivantes permettent souvent d'obtenir des convergences en probabilité.

Proposition 8. *(Inégalité de Markov)*
On suppose que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[|X|].$$

Corollaire 9. *(Inégalité de Tchébychev)*
On suppose que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}(X).$$

Proposition 10.

- *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers X, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X.*
- *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X, alors il existe une sous-suite de $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge presque sûrement vers X.*

Exemple 11. Dans le cas où $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité, on a pas nécessairement la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

On considère par exemple la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers zéro, mais on a $\mathbb{P}\left(\limsup_n \{X_n = 1\}\right) = 1$, donc il n'y a pas convergence presque sûre vers zéro.

Proposition 12. *Pour que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité, il suffit qu'elle soit de Cauchy en probabilités, c'est-à-dire que*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n, m \geq N \qquad \mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Proposition 13. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$ et que $Y_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} Y$. Alors :*

- *Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue, $f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} f(X)$.*
- *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X_n + \beta Y_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \alpha X + \beta Y$.*

1.3 Convergence dans L^p

On se donne $p \geq 1$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 14. *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X dans L^p si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_p = 0,$$

où on rappelle que $\|Y\|_p := \mathbb{E}[|Y|^p]$.

Proposition 15. *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X dans L^p, alors elle converge en probabilité vers X.*

Exemple 16. La réciproque à la proposition 16 est fausse. Par exemple, prenons $\Omega = \mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(X_n = n) = n^{-p} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-p}.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in L^p$, et $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité (en fait, il y a convergence presque sûre) vers zéro. En revanche, $\mathbb{E}[|X_n|^p] = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 17. *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires réelles, définies et intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite uniformément intégrable si*

$$\lim_{M\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{X_i > M\}}] = 0.$$

Proposition 18. *La famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si*

- *$(X_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^1, c'est-à-dire $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|] < \infty$, et*
- *$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) \leq \delta \Longrightarrow \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] \leq \varepsilon$.*

Théorème 19. *(Théorème de convergence dominée généralisé)*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes

- *$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$ et la famille $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.*
- *X est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$.*

1.4 Convergence en loi

Théorème 20. *(Théorème et définition, Paul Levy)*

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_X la fonction de répartition de X, définie par $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et φ_X la fonction caractéristique de X, définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. *On a $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point t où F_X est continue.*

ii. *On a $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \phi(X_n)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \phi(X)\, d\mathbb{P}$ pour toute fonction $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée.*

iii. *On a $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

iv. *Il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ sur lequel sont définies une variable aléatoire X' et une suite de variables aléatoires $(X_n')_{n\in\mathbb{N}}$ telles que X et X' soient de même loi, X_n et X_n' soient de même loi pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $(X_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}'$-presque-sûrement vers X'.*

On dit alors que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, et on note $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$.

Proposition 21.

- *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers X, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X.*
- *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilités vers X, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X.*

Exemple 22. Soit $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ et $X_n=(-1)^n X$. Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, mais ne converge ni presque sûrement ni en probabilités vers X.

Proposition 23. *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une constante $c\in\mathbb{R}$, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers c.*

Théorème 24. *(Lemme de Slutsky)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ des suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X et que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers une constante $c\in\mathbb{R}$. Alors le couple (X_n,Y_n) converge en loi vers le couple (X,c).
En particulier, on a $X_n+Y_n\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}X+c$ et $X_nY_n\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}cX$.

Exemple 25. On suppose que X_n et X sont à valeurs entières. Alors $X_n\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}X$ si et seulement si on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(X=k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

2 Théorèmes limites

2.1 Loi(s) des grands nombres

Proposition 26. *(Loi faible des grands nombres)*
On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n\in L^2$ et que $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0$ pour tout $i,j\geq 1$, où $\mathrm{Cov}(X,Y)\overset{\text{def}}{:=}\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$. On suppose de plus que $\mathbb{E}[X_i]=0$ et $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$ pour tout $i\geq 1$.
Alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers zéro.
Ce résultat repose sur l'inégalité de Tchébychev, et il est en particulier vrai lorsque les X_i sont indépendantes.

Théorème 27. *(Loi forte des grands nombres)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et de même loi. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-}p.s}{\to}}\mathbb{E}[X_0].$$

Remarque 28. La preuve est cependant beaucoup plus simple si $X_n\in L^4(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, via l'inégalité de Tchébychev.

Exemple 29. En reprenant les notations de l'exemple 5, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-p.s}}{\to}}\frac{1}{2}.$$

Autrement dit, presque tout nombre de $[0,1]$ admet en moyenne autant de 0 que de 1 dans son développement dyadique.

Application 30. (En statistiques)
Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon issu d'une loi de moyenne μ et de variance σ^2.
Alors l'estimateur des moments $\overline{X_n}:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ est sans biais, et fortement convergent.

2.2 Théorème central limite et applications

Proposition 31. *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ suivant une loi normale centrée réduite. Alors la fonction caractéristique φ_X de X vérifie*

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad\varphi_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Développement 1 :

Théorème 32. *(Théorème central limite)*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On suppose que $X_0\in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et on note $\sigma^2=\mathrm{Var}(X_0)$ et $\mu=\mathbb{E}[X_0]$. On suppose de plus que $\sigma^2>0$.
Par hypothèse, on a donc $X_n\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$ et $\mathbb{E}[X_n]=\mu$pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On note également $S_n=X_1+\cdots+X_n$ pour tout $n\geq 1$.
On a alors la convergence en loi

$$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}\mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Application 33. (En statistiques)
On considère le modèle statistique $(\{0,1\}^n,\{\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}\}_{\theta\in]0,1[})$ du jeu de pile ou face. Alors l'estimateur des moments $\overline{X_n}$ construit avec le n-échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ est asymptotiquement normal, de vitesse $\sqrt{n}$, car le théorème central limite donne :

$$\sqrt{n}\,(\overline{X_n}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\to}\mathcal{N}(0,\theta(1-\theta)).$$

Théorème 34. *(δ-méthode, **Admis**)*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires d'espérence θ et de variance σ^2.
Soit $\overline{X_n}$ un estimateur de θ.
On suppose que

$$\sqrt{n}\,(\overline{X_n}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}\mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Alors pour toute fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g'(\theta)\neq 0$ on a

$$\sqrt{n}\,(g(\overline{X_n})-g(\theta)) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(g'(\theta))^2).$$

(On peut donner ici un exemple de construction d'intervalle de confiance, mais j'ai un peu la flemme là)

3 Convergence des sous-martingales

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 35. *On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est une sous-martingale (respectivement une martingale) si*

1. $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n$ *est $\mathcal{F}_n$-mesurable (on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée à la filtration).*
3. $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\geq X_n$ *p.s. (respectivement $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=X_n$ p.s)*

Remarque 36. Par définition de l'espérance conditionnelle, la propriété 3 équivaut à

$$\forall A\in\mathcal{F}_n\quad \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_A]\geq\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_A].$$

Définition 37. *On dit qu'une variable aléatoire T sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si*

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}\quad\{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n,$$

où on définit $\mathcal{F}_\infty=\sigma(\mathcal{F}_n:\ n\in\mathbb{N})$ comme la tribu engendrée par les éléments de l'ensemble des tribus $\mathcal{F}_n$.

Si T est un temps d'arrêt, on définit la tribu des évènements antérieurs à T par

$$\mathcal{F}_T:=\{A\in\mathcal{F}_\infty:\ \forall n\in\mathbb{N}\quad A\cap\{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n\}.$$

Théorème 38. *Si T est un temps d'arrêt et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale, alors la suite $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une sous-martingale.*

Théorème 39. *(Théorème d'arrêt)*

Soit $S\leq T$ deux temps d'arrêt bornés. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale. Alors $X_T\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]\ \geq\ X_S$$

En particulier, il vient $\mathbb{E}[X_T]\geq\mathbb{E}[X_S]$.

3.2 Convergence presque sûre des sous-martingales bornées dans L^1

Définition 40. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

On se donne $a<b\in\mathbb{R}$ et on définit $\tau_1=\inf\{k\geq 1\ :\ u_k\leq a\}$, avec la convention $\inf(\varnothing)=+\infty$. On définit alors par récurrence

$$\tau_{2n}:=\inf\{k>\tau_{2n-1}\ :\ u_k\geq b\}\quad\text{et}\quad\tau_{2n+1}:=\inf\{k>\tau_{2n}\ :\ u_k\leq a\}.$$

On peut alors définir le nombre de traversées montantes de l'intervalle $[a,b]$ par

$$U_\infty(a,b)\ :=\ \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{\tau_{2k}<+\infty\}},$$

ainsi que le nombre de traversées avant l'instant n par

$$U_n(a,b)\ :=\ \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{\tau_{2k}\leq n\}}.$$

Par exemple, sur le dessin suivant, on a $U_{11}(a,b)=1$:

Remarque 41.

Faire un dessin rapide au tableau est appréciable, la définition formelle des τ_k étant un quand même un peu lourde.

Lemme 42. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ tels que $a<b$, on a $U_\infty(a,b)<+\infty$.*

Développement 2 :

Théorème 43. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(X_n^+)<+\infty.$$

Alors il existe une variable aléatoire X_∞ intégrable telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

3.3 Convergence L^1 et L^p des martingales pour $p>1$

Théorème 44. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- *$(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.*
- *$(X_n)_{n\geq 0}$ converge p.s et dans $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.*

- *$(X_n)_{n\geq 0}$ est fermée, i.e il existe $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$.*

Proposition 45. *(Inégalité maximale de Doob)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale. On a pour tout $x > 0$ et tout $p \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n} |X_k|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_n|^p].$$

Théorème 46. *(Convergence L^p)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale bornée dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement dans L^p.

4 Annexe

Faire un tableau illustrant les liens entre les différentes convergence.
On peut aussi ajouter le dessin pour les temps τ_k.