P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 250. Transformée de Fourier. Applications

Devs :

- Densité des polynômes orthogonaux
- Transformée de Fourier de la gaussienne et théorème central limite
- Equation de Schrödinger dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Références :

1. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
2. Gasquet-Witomski, Analyse de Fourier et applications
3. Barbe-Ledoux, Probabilités
4. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
5. Zuily-Quéffélec, Analyse pour l'agrégation
6. Objectif Agrégation
7. Rauch, Partial differential equations

Deux choix, loin d'être canoniques, sont effectués dans ce plan. Le premier est de commencer par définir la transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est l'ensemble le plus naturel pour faire de l'analyse de Fourier. On suit ainsi le plan de cours qui est fait dans le livre de Stein & Shakarchi. Le second est de ne pas parler de distributions tempérées, mais de présenter à la place des applications variées dans d'autres domaines des mathématiques. Ce dernier choix est évidemment lié à ma méconnaissance certaine des distributions tempérées.

1 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

1.1 Espace de Schwarz et transformée de Fourier

Définition 1. *On appelle espace de Schwarz l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui sont à décroissance rapide, c'est-à-dire l'espace*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,:\, \forall k, \ell \in \mathbb{N} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \, |f^{(\ell)}(x)| < \infty \right\}.$$

Proposition 2. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors*

$$f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad x \mapsto x\, f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Exemple 3. La fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 4. *On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx.$$

On utilise la notation $f(x) \to \hat{f}(\xi)$ pour signifier que $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Proposition 5. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On a*

- $f(x+h) \to \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi h\xi}$,
- $f(x)\, e^{-2i\pi x h} \to \hat{f}(\xi + h)$,
- $f(\delta x) \to \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1}\xi)$.
- $f'(x) \to 2i\pi\, \hat{f}(\xi)$,
- $-2i\pi x\, f(x) \to \dfrac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$.

Proposition 6. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

1.2 Convolutions, « bon noyaux », et formule d'inversion de Fourier

Définition 7. *Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Proposition 8. *L'application $*$ est bien définie sur $L^p \times L^q$. C'est une forme bilinéaire symétrique, et elle vérifie de plus*

$$\forall (f,g) \in L^p \times L^q \qquad \operatorname{Supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{Supp}(f) + \operatorname{Supp}(g)}.$$

Proposition 9. *Pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, la fonction $f * g$ est uniformément continue, bornée et vérifie*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Définition 10. *On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{R}$ est une suite de « bons noyaux » lorsqu'elle vérifie :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} K_n(x)\, dx = 1,$
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |K_n(x)|\, dx < \infty,$
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{\delta \leq |x| < +\infty} |K_n(x)|\, dx = 0.$

Proposition 11. *Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de bons noyaux, alors pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f * K_\delta - f\|_\infty = 0.$$

Théorème 12. *(Transformée de la gaussienne).*

Soit $f: x \mapsto e^{-\pi x^2}$. Alors $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.

Corollaire 13. *Soit $\delta > 0$ et $K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta}$. Alors $\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi \delta \xi^2}$.*

Proposition 14. *La famille $(K_\delta)_{\delta > 0}$ est une famille de bons noyaux lorsque $\delta \to 0$.*

Proposition 15. *(Formule de multiplication). Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, g(y)\, dy.$$

Théorème 16. *(Formule d'inversion de Fourier).*

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x \xi}\, d\xi.$$

Corollaire 17. *L'application $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ est une bijection sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

1.3 Formule de Plancherell

Proposition 18. *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$.*

Théorème 19. *(Plancherell). Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\|\hat{f}\| = \|f\|$.*

2 Extensions de la transformée de Fourier

2.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Définition 20. *On définit encore la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx.$$

Exemple 21. Soit $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Alors $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi (b-a)\, \xi)}{\pi \xi} e^{-i\pi (a+b)\, \xi} \mathbf{1}_{\xi \neq 0} + (b-a)\, \mathbf{1}_{\xi = 0}$.

Remarque 22. Dans l'exemple précédent, $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ car $\left|\frac{\sin(\pi (b-a)\, \xi)}{\pi \xi}\right|$ n'est pas intégrable. Les choses ne se passent pas aussi bien que sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 23. *Si $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et/ou si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$, les deux dernières propriétés de la proposition 5 sont encore valables.*

Théorème 24. *(Riemann-Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ est un opérateur continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$. De plus, on a*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Théorème 25. *Si f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, le théorème d'inversion de Fourier est encore vérifié.*

Corollaire 26. *L'application $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$ (mais on perd le caractère surjectif qui existait sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).*

2.2 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Proposition 27. *(Admise). L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Proposition 28. *(Théorème de prolongement). Soient E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E. Si A est un opérateur linéaire continu de G dans F, alors il existe un prolongement unique $\tilde{A}$ linéaire continu de E dans F et $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.*

Théorème 29. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$, et la transformation invers $\overline{\mathcal{F}}$ (qui est telle que $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) se prolongent chacune en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, et on a*

- $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f = f$ *λ-presque partout,*
- $\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F} f\|_{L^2}$.

Proposition 30. *La transformée de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})$ et celle obtenue par prolongement de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.*

Proposition 31. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f)$ est limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite de fonctions g_n définie par $g_n(\xi) = \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi x\xi} f(x) dx$.*

Exemple 32. On a $\frac{\sin(x)}{x} \to \pi \mathbf{1}_{\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]}(\xi)$.

2.3 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 33. *On définit l'espace de Schwarz sur $\mathbb{R}^d$ comme l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty$.*

Définition 34. *On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}\, dx.$$

Proposition 35. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors :*

- $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \to (2i\pi)^\alpha \hat{f}(\xi)$,
- $(-2i\pi x)^\alpha f(x) \to \left(\frac{d}{d\xi}\right)^\alpha \hat{f}(\xi)$.
- $f(Rx) \to \hat{f}(R\xi)$ *où R est une rotation (i.e un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ qui préserve le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).*

Théorème 36. *(Inversion de Fourier dans $\mathbb{R}^d$).*

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi \langle x, \xi \rangle}\, d\xi$.

3 Applications

3.1 Formule sommatoire de Poisson

Théorème 37. *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, et on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n x}.$$

En particulier, pour $x = 0$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

Exemple 38. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+n} = \pi \cot(\pi x)$, où $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ désigne la fonction cotangente.

3.2 Polynômes orthogonaux

Définition 39. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids sur I une application $\rho\colon I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \rho(x)\, dx \; < \infty.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrales sur I par rapport à la mesure dont la densité est ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 40. *$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ définit par*

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\, \rho(x)\, dx.$$

Proposition 41. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour $\langle .,.\rangle_\rho$, tels que $\deg(P_n) = n$. Elle s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.*

Développement 1 :

Théorème 42.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids sur I. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx \;\; < \;\; \infty.$$

Alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

3.3 Application aux probabilités : fonctions caractéristiques

Définition 43. *Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On appelle fonction caractéristique de X ou de la loi de X, ou transformée de Fourier, et on note φ_X, la fonction à valeurs complexe définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x\rangle}\, d\mathbb{P}_X(x)$.*

Théorème 44. *Soit X et Y deux vecteurs aléatoires de lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ telles que $\varphi_X = \varphi_Y$. Alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$: la fonction caractéristique caractérise la loi.*

Exemple 45. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suivant une loi normale centrée réduite. Alors la fonction caractéristique φ_X de X vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Développement 2 :

Théorème 46. *(Théorème central limite)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_0)$ et $\mu = \mathbb{E}[X_0]$. On suppose de plus que $\sigma^2 > 0$.

Par hypothèse, on a donc $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}[X_n] = \mu$pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note également $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

On a alors la convergence en loi

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

3.4 Application en physique : équation de Schrödinger et principe d'incertitude d'Heisenberg

Développement 3 :

Théorème 47. *(Equation de Schrödinger). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ telle que*

1. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = f(x),$
3. *Si* $g_t\colon x \mapsto u(x,t)$, *alors*

$$\forall T > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad M^T_{\alpha,\beta} := \sup_{|t|<T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^\alpha g_t^{(\beta)}(x)\right| < \infty.$$

De plus, on connait explicitement la solution u, qui est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x,t) \;\; = \;\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Théorème 48. *(Principe d'incertitude d'Heisenberg).*

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *telle que* $\|\psi\|_{L^2} = 1$. *Alors*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \, |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \right) \; \geq \; \frac{1}{16\pi^2},$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $\psi(X) = A e^{-Bx^2}$ *où* $B > 0$ *et* $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$.

Corollaire 49. *Pour tout* $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_0)^2 \, |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \right) \; \geq \; \frac{1}{16\pi^2}.$$

Remarque 50. Le principe d'incertitude, en mécanique quantique, se résume ainsi :

$$(\text{incertitude de la position}) \times (\text{incertitude de la quantité de mouvement}) \geq \frac{\hbar}{16}.$$