

Leçon 246. Séries de Fourier. Exemples et applications

Devs :

- Théorème de Féjer
- Inégalité isopérimétrique

Références :

1. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
2. Gourdon, Analyse

1 Généralités et théorie L^2 des séries de Fourier

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. On définit le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on identifie les fonctions sur $\mathbb{T}$ à valeurs complexes avec les fonctions 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{T}$ de la mesure $\bar{\lambda}$ définie par $\bar{\lambda}(A + 2\pi\mathbb{Z}) = \lambda(A \cap [0, 2\pi])$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, de sorte que pour toute fonction f borélienne positive sur $\mathbb{T}$ ou dans $L^1(\bar{\lambda})$, on ait

$$\int_{\mathbb{T}} f d\bar{\lambda} = \int_{[0, 2\pi[} f d\lambda.$$

Dans la suite, on notera simplement λ , ou « dx » la mesure $\bar{\lambda}$, qui est donc la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

Définition 2. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt.$$

On appelle série de Fourier associée (formellement) à f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$, et on note $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à cette dernière.

Proposition 3. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire sur $L^1(\mathbb{T})$. De plus, si f est dérivable sur $\mathbb{T}$, elle vérifie

$$\widehat{\left(\frac{d}{df}\right)}(n) = in \hat{f}(n).$$

Théorème 4. (Injectivité des coefficients de Fourier)

Si $f \in C^0(\mathbb{T})$ vérifie $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ sur $\mathbb{T}$.

Théorème 5. (Lemme de Riemann Lebesgue)

Pour tout $f \in C^0(\mathbb{T})$, on a $\hat{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exemple 6. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente (c'est-à-dire que c'est une intégrale généralisée convergente mais qui n'est pas absolument convergente), et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque f est plus régulière, on a le raffinement suivant.

Proposition 7. Soit $f \in C^2(\mathbb{T})$. Alors $\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^2}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

1.2 Théorie L^2 des séries de Fourier

Théorème 8. L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx$ est un espace de Hilbert, et la famille $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Corollaire 9. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors

1. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$,
2. $f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$, la convergence étant au sens de la norme de $L^2(\mathbb{T})$,
3. l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie linéaire bijective,
4. pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$.

Exemple 10. En considérant la fonction f définie par $f(\theta) = |\theta|$ sur $\mathbb{T}$ et en appliquant l'égalité de Parseval, on obtient les égalités

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2 Convergence ponctuelle

2.1 Résultats généraux

La convergence de la série de Fourier de f vers f dans les cas où $f \in L^1(\mathbb{T})$ ou même $f \in C^0(\mathbb{T})$ n'est pas aussi simple que dans le cas L^2 . On a par exemple le cas pathologique suivant.

Exemple 11. La fonction $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3} + 1) \cdot \frac{x}{2}\right]$$

est continue sur $\mathbb{T}$, mais sa série de FOURIER diverge en zéro.

On peut cependant donner de nombreux théorèmes de convergence, mais dont les hypothèses sont plus contraignantes.

Théorème 12. (Théorème de Dirichlet)

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On suppose que f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{T}$. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{T}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Exemple 13. La fonction f définie sur $\mathbb{T}$ par $f(\theta) = |\theta|$ a pour coefficients de Fourier

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } n=0 \\ \frac{-1 + (-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

En appliquant le théorème de Dirichlet, on obtient

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Théorème 14. (Convergence normale)

Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$ une fonction C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

Théorème 15. (Théorème de Bernstein)

On suppose que $f \in L^1(\mathbb{T})$ est α -höldérienne, avec $\alpha > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{T} \quad |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha.$$

Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

2.2 Convergence au sens de Césaro

Définition 16. On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{T}$ est un « bon noyau » lorsqu'elle vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1,$
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty,$
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx = 0.$

Théorème 17. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un bon noyau et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Pour tout point de continuité x de f , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors la limite est uniforme.

Définition 18. On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer les suites de fonctions respectives $(D_N)_{N \geq 1}$ et $(F_N)_{N \geq 1}$ définies sur $\mathbb{T}$ par :

$$\forall N \geq 1 \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} \quad \text{et} \quad F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Développement 1 :

Théorème 19. (Théorème de Féjer)

Pour tout $x \in \mathbb{T}$ non nul, on a $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, et le noyau de Féjer est un bon noyau.

Cela signifie en particulier, que pour une fonction $f \in C_0(\mathbb{T})$, la somme partielle de ses coefficients de Fourier $S_N(f)$ définie sur $\mathbb{T}$ par $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} = (f * D_N)(t)$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f .

Corollaire 20. (Théorème de Weierstrass trigonométrie)

L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $C^0(\mathbb{T})$.

Application 21. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $f = 0$ sur $\mathbb{T}$. Ce résultat raffine le théorème 4.

Le théorème de Weierstrass trigonométrie nous sera également utile dans la démonstration du critère de Weyl, partie 3.2.

Théorème 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Alors la série de fonctions $\sum \hat{f}(n) e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{T}$ et sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{T}$ qui est égale à f presque partout, i.e pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, on a $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$.

Si de plus f est continue, l'égalité a lieu partout.

3 Applications de la théorie

3.1 Inégalité isopérimétrique

Définition 23. 1. On appelle courbe paramétrée une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant

- $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$.
- $\forall s \in [a, b] \quad \gamma'(s) \neq 0$.

On note alors $\Gamma := \text{Im}(\gamma)$ et on dit que Γ est une courbe.

2. On dit qu'une courbe Γ est **simple** si elle ne s'intersecte pas, c'est-à-dire si

$$\forall (s_1, s_2) \in [a, b]^2 \quad \gamma(s_1) = \gamma(s_2) \implies s_1 = a \text{ et } s_2 = b$$

3. On dit qu'une courbe Γ est **fermée** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Proposition 24. Soit φ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Alors la courbe paramétrée η définie par $\eta(t) = \gamma(\varphi(t))$ a la même image que γ : on dit que η est une autre paramétrisation pour la courbe Γ .

Les conditions d'être fermée et d'être simple pour une courbe Γ ne dépendent pas de la paramétrisation choisie.

Définition 25. On dit que deux paramétrisation $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\eta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ sont équivalentes si

$$\forall t \in [c, d] \quad (\gamma^{-1} \circ \eta)'(t) > 0.$$

Ceci signifie que γ et η ont la même orientation sur la courbe Γ .

On dit que η renverse l'orientation de γ si

$$\forall t \in [c, d] \quad (\gamma^{-1} \circ \eta)'(t) < 0.$$

Définition 26. On appelle longueur d'une courbe Γ paramétrée par $\gamma = (x, y)$ le réel

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &:= \int_a^b |\gamma'(s)| ds \\ &= \int_a^b (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{1/2} ds. \end{aligned}$$

Proposition 27. La longueur de la courbe Γ est indépendante de la paramétrisation choisie.

Définition 28. On dit qu'une paramétrisation $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ est une paramétrisation par longueur d'arc si $|\gamma'(s)| = 1$ pour tout $s \in [a, b]$.

Cela signifie en particulier que la longueur de Γ vaut exactement $b - a$. Aussi, à une translation près, une paramétrisation par longueur d'arc est définie sur $[0, \ell]$.

Théorème 29. Toute courbe fermée simple admet une paramétrisation par longueur d'arc.

Lemme 30. En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \lambda(K) &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma} x dy - y dx \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b [x(s) y'(s) - y(s) x'(s)] ds \right|. \end{aligned}$$

On dit que $\lambda(K)$ est l'aire de la région enfermée par la courbe Γ .

Développement 2 :

Théorème 31. (Inégalité isopérimétrique)

Soit Γ une courbe fermée simple sur $\mathbb{R}^2$ de longueur ℓ , et $\mathcal{A}$ l'aire de la région enfermée par Γ . Alors on a

$$\mathcal{A} \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.

3.2 Critère d'équirépartition de Weyl

Pour finir, on utilise certaines idées de la théorie des séries de Fourier pour résoudre un problème portant sur certaines propriétés des nombres irrationnels.

Dans ce qui suit, on note $\mathcal{E}([0, 1[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0, 1[$ à valeurs réelles. On rappelle que $\mathcal{E}([0, 1[, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1[, \mathbb{R})$.

Définition 32. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0, 1[$ est équirépartie si pour tout intervalle ouvert $]a, b[\subset [0, 1[$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}\{1 \leq n \leq N : x_n \in]a, b[\}}{N} = b - a.$$

Cela signifie que pour N assez grand, la proportion d'éléments x_n dans $]a, b[$ pour $1 \leq n \leq N$, s'approche du quotient de la longueur de l'intervalle $]a, b[$ par la longueur de l'intervalle $[0, 1[$.

Proposition 33.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$ tels que $a < b$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[a, b[}(x_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_{[a, b[}(x) dx.$$

Théorème 34. (*Critère de Weyl*)

On se donne une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0, 1[$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi k x_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemple 35. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels est équirépartie modulo 1 lorsque la suite $(x_n - \lfloor x_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

Le théorème de Weyl permet alors de montrer très facilement que pour $\gamma > 0$, la suite $(n\gamma)_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement si γ est irrationnel.

On pourrait rajouter une sous-partie sur la résolution de l'équation de la chaleur, après s'être informé davantage sur le sujet.