P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 245. Fonction d'une variable complexe. Exemples et applications

Devs :

- Fonction Gamma
- Densité des polynômes orthogonaux

Références :

1. Rudin, Analyse réelle et complexe
2. Pabion, Elements d'analyse complexe
3. Gourdon, Analyse
4. Objectif Agrégation
5. Zuily-Quéffélec, Analyse pour l'agrégation
6. Objectif Agrégation

On se donne Ω un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.

1 Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables et fonctions analytiques

1.1 Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables

Définition 1. *Soit $F:\Omega\to\mathbb{C}$, et $a\in\Omega$. On dit que F est $\mathbb{C}$-dérivable en a si $\dfrac{F(z)-F(a)}{z-a}$ a une limite finie quand z tend vers a. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de F en a.*

Définition 2. *On dit que $F:\Omega\to\mathbb{C}$ est holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de Ω. On note $F'(z)=\lim\limits_{\zeta\to z}\dfrac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}$ la fonction dérivée de F. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.*

Exemple 3. Si $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est un polynôme, alors P est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Si F est une fraction rationnelle, alors F est holomorphe sur l'ouvert $\Omega\setminus\mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ désigne les pôles de F.

Proposition 4. *(Equations de Cauchy-Riemann).*

Soit $F:\Omega\to\mathbb{C}$. On suppose que F est différentiable en $a\in\Omega$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- *F est $\mathbb{C}$-dérivable en a.*
- *$DF(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*
- *Si $F=P+iQ$, alors $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.*

Exemple 5. La fonction F définie sur $\mathbb{C}$ par $F(z)=\sin(\mathrm{Re}(z))\,\mathrm{ch}(\mathrm{Im}(z))+i\cos(\mathrm{Re}(z))\,\mathrm{sh}(\mathrm{Im}(z))$ est différentiable et vérifie les équations de Cauchy-Riemann. Donc F est holomorphe.

1.2 Séries entières

Définition 6. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $z\in\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe.*

Proposition 7. *(Lemme d'Abel)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0\in\mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z|<|z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 8. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence R de la série entière par :*

$$R:=\sup\{r\geq 0:\ (|a_n|\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{est bornée}\}.$$

Proposition 9. *D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z|<R$ et diverge pour tout $|z|>R$.*

Exemple 10. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R=+\infty$.

Théorème 11. *Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclu dans le disque de convergence.*

Corollaire 12. *L'application $z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $D(0,R)$.*

Corollaire 13. *La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a*

$$a_p=\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\quad\text{donc}\quad\forall z\in\mathbb{C}\quad f(z)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p.$$

Remarque 14. On a pas de telle propriétés sur le cercle de convergence $C(0,R)$.

Par exemple, $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ n'est pas continue en $z = 1$, mais $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ l'est.

1.3 Fonctions analytiques

On se donne $F: \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de variable complexe.

Définition 15. *Soit $a \in \Omega$. On dit que F est analytique en a s'il existe :*

- *un nombre $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$,*
- *une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$.*

tels que $\forall z \in D(a, r), \; F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$.

Définition 16. *On dit que F est analytique si elle est analytique en tout point de son ouvert de définition. On dit que F est une fonction entière si elle est analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

Proposition 17. *Toute fonction analytique en un point a est holomorphe en a. En particulier, toute fonction analytique est holomorphe.*

Exemple 18. La fonction $f: x \mapsto e^{-1/x^2} \mathbf{1}_{x>0}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas analytique car elle n'est pas développable en série entière en zéro.

2 Formule de Cauchy et fonctions holomorphes

2.1 Intégrale sur un chemin et formule de Cauchy

Définition 19. *Un chemin $\gamma: [0, 1] \to \Omega$ est appelé un lacet lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 20. *Soit γ un lacet sur Ω. Alors pour tout $z \in \Omega \backslash \langle \gamma \rangle$ on définit*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposition 21. *La fonction Ind_γ est à valeus entières sur $\Omega \backslash \langle \gamma \rangle$, constante sur chaque composante connexe de $\Omega \backslash \langle \gamma \rangle$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\langle \gamma \rangle$.*

Exemple 22. Si $\gamma = C(a, r)^+$ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r, alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \langle C(a, r)^+ \rangle, \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z - a| < r \\ 0 \text{ si } |z - a| > r \end{cases}.$$

Théorème 23. *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que f' est continue sur Ω. Alors pour tout lacet γ à valeurs dans Ω, on a $\int_\gamma f'(z)\, dz = 0$.*

Théorème 24. *(Goursat).*

Soit Δ un triangle fermé, inclu un ouvert étoilé Ω. Soit $p \in \Omega$ et f une fonction continue sur Ω telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{p\})$. Alors $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.

Théorème 25. *(Théorème de Cauchy sur un ouvert étoile).*

Soit Ω un ouvert étoilé, $p \in \Omega$, f une fonction continue sur Ω avec $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{p\})$. Alors pour tout lacet γ à valeurs dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Application 26. (Théorème d'Alembert-Gauss).

Tout polynôme à coefficients complexes de degré strictement positif a au moins une racine complexe.

Théorème 27. *(Formule de Cauchy sur un ouvert étoilé).*

On suppose toujours que Ω est étoilé. Soit γ un lacet sur Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin \langle \gamma \rangle$, alors on a

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

2.2 Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes

Proposition 28. *(Propriété de la moyenne).*

Soit F une fonction holomorphe sur Ω. Pour $z \in \Omega$, soit $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$. Alors

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z + r e^{it})\, dt.$$

Théorème 29. *Toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω est développable en série entière en tout point de Ω, donc analytique.*

Proposition 30. *(Inégalité de Cauchy).*

Soit F une fonction holomorphe sur Ω, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$. Alors on a

$$\left| \frac{F^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad \text{avec } M(r) := \sup_{|z-a|=r} |F(z)|.$$

Corollaire 31. *Toute fonction entière bornée est constante.*

Théorème 32. *La limite d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω qui convergent uniformément sur tout compact est holomorphe.*

Théorème 33. *(Théorème d'inversion locale, version holomorphe).*
Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et $\varphi'(z_0) \neq 0$. Il existe un voisinnage ouvert V de z_0 tel que

- *φ est injective sur V.*
- *$W = \varphi(V)$ est un ouvert et si $\Psi: W \to V$ est définie par $\Psi(\varphi(z)) = z$, alors $\Psi \in \mathcal{H}(W)$.*

Théorème 34. *(Théorème de l'application ouverte).*
Soit Ω un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$: on dit que f est une application ouverte.

2.3 Principe du maximum de Riemann

Théorème 35. *(Principe du maximum local)*
On suppose que f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω. Si $|f|$ admet un minimum local en $a \in \Omega$, alors elle est constante sur un voisinnage de a.

Théorème 36. *(Principe du maximum global)*
On suppose que Ω est connexe et borné, et que f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω. Alors

$$\forall z \in \Omega \quad |f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|.$$

De plus, s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = M$, alors f est constante sur Ω.

Application 37. (Lemme de Schwarz)
Soit $f: D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorphe. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. Alors

$$\forall z \in D(0,1) \quad |f(z)| \leq |z|.$$

De plus, s'il existe $z_0 \in D(0,1)$ non nul tel que $f(z_0) = z_0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $a \in \mathbb{U}$ tel que $f(z) = a\,z$ pour tout $z \in D(0,1)$. Autrement dit, f est une homothétie.

Application 38. Pour $\alpha \in D(0,1)$, on pose $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}\,z}$. Alors $\varphi_\alpha: D(0,1) \to D(0,1)$ est une bijection, telle que $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, de fonction réciproque $\varphi_{-\alpha}$. On a $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ et $\varphi'_\alpha(\alpha) = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$.

2.4 Prolongement des fonctions holomorphes. Applications.

On suppose ici que Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Théorème 39. *(Théorème des zéros isolés de Riemann)*
Soit f holomorphe non nulle sur Ω. Alors l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ des zéros de f est un ensemble discret, ce qui signifie que pour tout $a \in \mathcal{Z}(f)$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{Z}(f) \cap D(a, r) = \{a\}$.

Corollaire 40. *Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ est non nulle, alors $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable et pour tout compact K de D, $\mathcal{Z}(f) \cap K$ est fini.*

Corollaire 41. *(Théorème du prolongement analytique)*
Si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω et si $f(z) = g(z)$ pour tout z dans un ensemble qui possède un point d'accumulation dans Ω, alors on a $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Développement 1 :

Application 42. La fonction Γ définie par $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0 = \{\mathrm{Re} > 0\}$.

Elle se prolonge en une unique fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, et $\dfrac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z \cdot n!}.$$

Définition 43. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids sur I une application $\rho: I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < \infty.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrales sur I par rapport à la mesure dont la densité est ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 44. *$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ définit par*

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,\rho(x)\,dx.$$

Proposition 45. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour $\langle ., . \rangle_\rho$, tels que $\deg(P_n) = n$. Elle s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.*

Développement 2 :

Théorème 46.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids sur I. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x)\,dx < \infty.$$

Alors la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

3 Fonctions méromorphes

3.1 Classification des singularités

Théorème 47. *Soit $a\in\Omega$ et $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$. Alors on est dans l'un des trois cas suivants :*

1. *f a une singularité artificielle en a.*
2. Il *existe $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{C}$ avec $c_m\neq 0$ tels que $f(z)-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$ ait une singularité artificielle en a (on dit que f a un pôle d'ordre a).*
3. *Si $r>0$ et $D(a,r)\subset\Omega$, l'image $f(\overline{D(a,r)})$ est dense dans le plan complexe. On dit que f a une singularité essentielle en a.*

Définition 48. *Soit $f\in H(\Omega\setminus A)$ admettant des poles en tout point de A. Si $f-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$ a une singularité artificielle en a, on appelle résidu de f en a et on note* $\mathrm{Res}(f,a)=c_1$ *le coefficient devant $\frac{1}{z-a}$.*

Proposition 49. *(Calcul pratique des résidus).*

On suppose que F est une fonction holomorphe qui présente en a un pôle simple. On suppose de plus que localement en a, F se met sous la forme d'un quotient $F=\frac{G}{H}$, avec G,H holomorphes, $G(a)\neq 0$, $H(a)=0$ et $H'(a)\neq 0$. Alors $\mathrm{res}(F,a)=\lim_{z\to a}\frac{G(z)}{H'(z)}$.

Exemple 50. La fonction $\varphi\colon z\mapsto\frac{e^z}{1+z^2}$ a deux pôles simples i et $-i$, et $\mathrm{res}(\varphi,i)=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{2z}=\frac{e^i}{2i}$.

La fonction $\varphi\colon z\mapsto\frac{z^3}{1+z^4}$ a quatre pôles simples, les racines $4^{\text{èmes}}$ de -1. Pour chaque pôle ζ, on a

$$\mathrm{res}(\varphi,\zeta)=\lim_{z\to\zeta}\frac{z^3}{4z^3}=\frac{1}{4}.$$

3.2 Théorème des résidus

Théorème 51. *(Théorème des résidus).*

Soit $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ et A l'ensemble des pôles de f dans Ω. Soit γ un lacet à valeur dans $\Omega\setminus A$, tel que $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=0$ pour tout $\alpha\notin\Omega$. Alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{\alpha\in A}\mathrm{Res}(f,a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)$.

Application 52. Le théorème des résidus s'applique au calcul intégral.

Par exemple, on a $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}$.