P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 243. Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible
- Série génératrice d'une variable aléatoire et moments

Références :

1. El Amrani, Suites et séries
2. Gourdon, Analyse
3. Candelpergher, Théorie des probabilités
4. Foata-Fuchs, Calcul des probabilités
5. Zuily-Quéffélec, Analyse pour l'agrégation

1 Généralités

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe.*

Proposition 2. *(Lemme d'Abel)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 3. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence R de la série entière par :*

$$R := \sup\{r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Proposition 4. *D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < R$ et diverge pour tout $|z| > R$.*

Exemple 5. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$.

Exemple 6. Le comportement sur le cercle d'incertitude $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ peut être varié.

- La série $\sum z^n$, dont le rayon de convergence vaut 1, diverge en tout point de module 1.
- La série $\sum z^n/n^2$, dont le rayon de convergence vaut 1, converge en tout point de module 1.
- La série $\sum z^n/n$, dont le rayon de convergence vaut 1, diverge en $z = 1$ mais converge en tout autre point de module 1.

1.2 Calcul du rayon de convergence

Proposition 7. *(Règle de d'Alembert). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = 1/L$.*

Exemple 8. Pour $\sum z^n/n!$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, et $R = +\infty$.

Théorème 9. *(Formule de Hadamard). Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{L}$ avec $L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.*

Exemple 10. Pour $\sum 2^n z^{2n}$, on a $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$ si n est pair et 0 sinon. On en déduit $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollaire 11. *(Règle de Cauchy). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite de terme général $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ converge vers L, alors $R = 1/L$.*

Proposition 12. *(Comparaison du rayon de convergence).*
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b. Alors :

- *Si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R_a \geq R_b$.*
- *Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.*
- *Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.*

1.3 Opérations sur les séries entières

Définition 13. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle série somme la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ et série produit, ou produit de Cauchy la série entière $\sum c_n z^n$, où*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On appelle encore série produit par $\lambda \in \mathbb{C}$ la série $\sum (\lambda a_n) z^n$.

Proposition 14. *L'ensemble des séries entières, muni de ces trois lois, est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.*

Théorème 15. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Alors :*

- *Le rayon de convergence de la série somme vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$, et $\forall |z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$.*
- *Le rayon de convergence de la série produit vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et pour tout $|z| < R$ on a $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.*
- *Le rayon de convergence de la série produit par $\lambda \in \mathbb{C}$ ne change pas, et pour $|z| < R_a$ on a $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n$.*

2 Propriétés de la somme sur le disque de convergence

2.1 Analycité

Théorème 16. *Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclu dans le disque de convergence.*

Corollaire 17. *L'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $D(0, R)$.*

Corollaire 18. *La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \quad \text{donc} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p.$$

Remarque 19. On a pas de telle propriétés sur le cercle de convergence $C(0, R)$.

Par exemple, $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ n'est pas continue en $z = 1$, mais $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ l'est.

Définition 20. *Soit $f: X \to \mathbb{C}$, avec $X \subset \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière en zéro s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R]$ avec $]-r, r[\subset X$ tel que $\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

Définition 21. *On dit que $f: X \to \mathbb{R}$ est développable en série entière au point $x_0 \in X$ si $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière en zéro. On dit que f est analytique sur X si elle est développable en série entière en tout point de X.*

Remarque 22. Les mêmes définitions subsistent pour $f: \Omega \to \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier est appelée fonction entière.

Exemple 23. Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ est analytique.

Exemple 24. La fonction $f: x \mapsto e^{-1/x^2} \mathbf{1}_{x>0}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas analytique car elle n'est pas développable en série entière en zéro.

Définition 25. *Si f est développable en série entière en $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un voisinnage de x_0 sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et le développement en série entière de f en x_0 est $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Cette série est appelée la série de Taylor de f en x_0.*

2.2 Fonctions holomorphes et séries entières

Dans cette partie, on se donne Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 26. *Un chemin $\gamma: [0, 1] \to \Omega$ est appelé un lacet lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 27. *Soit γ un lacet sur Ω. Alors pour tout $z \in \Omega \setminus \langle\gamma\rangle$ on définit*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposition 28. *La fonction Ind_γ est à valeus entières sur $\Omega \setminus \langle\gamma\rangle$, constante sur chaque composante connexe de $\Omega \setminus \langle\gamma\rangle$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\langle\gamma\rangle$.*

Exemple 29. Si $\gamma = C(a, r)^+$ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r, alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \langle C(a, r)^+ \rangle, \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z - a| < r \\ 0 \text{ si } |z - a| > r \end{cases}.$$

Théorème 30. *(Cauchy sur un ensemble convexe)*

On suppose ici que Ω est convexe. Soit γ un lacet sur Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin \langle\gamma\rangle$, alors on a

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Théorème 31. *Toute fonction holomorphe sur Ω est développable en série entière en tout point de Ω, donc analytique.*

On suppose désormais que Ω est connexe.

Théorème 32. *(Théorème des zéros isolés de Riemann)*

Soit f holomorphe non nulle sur Ω. Alors l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ des zéros de f est un ensemble discret, ce qui signifie que pour tout $a \in \mathcal{Z}(f)$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{Z}(f) \cap D(a, r) = \{a\}$.

Corollaire 33. *Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ est non nulle, alors $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable et pour tout compact K de D, $\mathcal{Z}(f) \cap K$ est fini.*

Corollaire 34. *(Théorème du prolongement analytique)*
Si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω et si $f(z)=g(z)$ pour tout z dans un ensemble qui possède un point d'accumulation dans Ω, alors on a $f(z)=g(z)$ pour tout $z\in\Omega$.

Exemple 35. La fonction Γ définie par $\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0=\{\mathrm{Re}>0\}$.

Elle se prolonge en une unique fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z\cdot n!}.$$

2.3 Comportement sur la frontière du disque de convergence

Développement 1 :

Théorème 36. *(Théorème d'Abel angulaire)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geq 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$ et on fixe $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On pose de plus

$$\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}\cap\{1-\rho e^{i\theta}:\ \rho>0\ \text{ et } \theta\in[-\theta_0,\theta_0]\}.$$

Alors on a $\lim\limits_{\substack{z\to1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$

Théorème 37. *(Théorème taubérien faible)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geq 1$ et f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=S$.
Si de plus $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge et $S=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

Théorème 38. *(Théorème taubérien fort, admis).*
Le résultat précédent est encore vrai si on suppose seulement $a_n=O(1/n)$.

3 Applications des séries entières

3.1 Exponentielle complexe

Proposition 39. *Soit $z\in\mathbb{C}$. La série $\sum\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. En tant que série de fonctions, elle converge uniformément sur tout sous-ensemble borné du plan complexe.*

Corollaire 40. *La fonction $\exp: z\mapsto\sum\frac{z^n}{n!}$ est définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$, et elle est continue sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs, elle vérifie $\exp(a)\exp(b)=\exp(a+b)$ pour tout $a,b\in\mathbb{C}$.*

Proposition 41. *La fonction exp est entière (holomorphe sur le plan complexe), et elle vérifie $\exp'(z)=\exp(z)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.*

Proposition 42.

- *Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a $\exp(z)\neq0$.*
- *La restriction de l'exponentielle à $\mathbb{R}$ est une fonction positive strictement croissante, qui vérifie*
$$\exp(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\quad\text{et}\quad\exp(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0.$$
- *Il existe un nombre positif π tel que $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ et tel que $e^z=1$ si et seulement si $\frac{z}{2\pi i}\in\mathbb{Z}$.*
- *La fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.*
- *L'application $t\mapsto e^{it}$ est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.*
- *L'exponentielle $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ est surjective.*

Définition 43. *On définit les fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{C}$ par*

$$\cos(z):=\mathrm{Re}(\exp(z))\quad\text{et}\quad\sin(z)=\mathrm{Im}(\exp(z)).$$

Proposition 44. *Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a*

$$\cos(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\quad\text{et}\quad\sin(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposition 45. *Les fonctions cos et sin restreintes à $\mathbb{R}$ sont 2π-périodiques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifient $\cos'(x)=-\sin(x)$ et $\sin'(x)=\cos(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.*

3.2 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

Définition 46. *On définit la fonction (ou série) génératrice de X comme la série entière $G_X(t):=\sum_{k\geq0}\mathbb{P}(X=k)t^k$.*

Proposition 47. *Le rayon de convergence R de la série entière $G_X(t)$ est supérieur ou égal à 1. La fonction $t\mapsto\mathbb{E}[t^X]$ est bien définie et à valeurs finies pour $t\in]-R,R[\cup\{-1,1\}$, et vérifie alors $\mathbb{E}[t^X]=G_X(t)$.*

Proposition 48.

1. *La fonction génératrice de X sur $[-1,1]$ détermine entièrement la loi de X.*

2. *Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.*

Développement 2 :

Théorème 49. *La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche au point 1, et dans ce cas, on a $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$.*

***Exemple* 50.** *On effectue des jeux de pile ou face successifs indépendants, avec probabilité $p \in]0,1[$ de faire face, et $1-p$ de faire pile. On s'arrête lorsque l'on obtient deux faces consécutives. En moyenne, il faut $\frac{1+p}{p^2}$ répétitions.*

Exemple 51. Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha)$, $G_X(t) = (1-\alpha)\frac{s}{1-\alpha s}$, et on en déduit $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1-\alpha}$.

3.3 Résolution d'équations différentielles

Théorème 52. *Soit $p(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n \geq 0} q_n x^n$. On suppose que ces séries entières convergent sur $]-R, R[$ avec $R > 0$. Alors pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution y sur $]-R, R[$ au problème de Cauchy $y'' + p y' + q y = 0$, $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant développable en série entière.*

Exemple 53. Le problème de Cauchy $(1-x^2)\, y'' - x y' = 2$ avec $y(0) = y'(0) = 0$ a pour solution $f: x \mapsto (\arcsin(x))^2$ sur $]-1,1[$. On déduit de la recherche de solution sous la forme de série entière de ce problème de Cauchy que le développement de $\arcsin^2$ en série entière sur $]-1,1[$ est donné par

$$\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+2}.$$