P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Devs :

- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible
- Théorème de Riesz-Fischer

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. El Amrani, Suites et séries
3. Hauchecorne, Contre-exemples en mathématiques
4. Briane-Pagès, Théorie de l'intégration
5. Foata-Fuchs, Calcul des probabilités
6. Candelpergher, Théorie des probabilités
7. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis

1 Convergence et régularité

On se donne E un ensemble et $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé.

1.1 Suites de fonctions

Définition 1. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de E vers F, et f une application de E vers F. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur E si pour tout $x\in E$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.*

Définition 2. *On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} \|f_n(x)-f(x)\|_F = 0$.*

Proposition 3. *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f sur E.*

Exemple 4. La suite de fonctions $f_n\colon \left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & [0,1]\\ x & \mapsto & x^n\end{array}\right.$ converge simplement vers $f\colon \left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & [0,1]\\ x & \mapsto & \mathbf{1}_{\{x=1\}}\end{array}\right.$ mais pas uniformément puisque $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = 1$.

Proposition 5. *(Critère de Cauchy uniforme)*

On suppose que F est complet.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de E vers F. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f si et seulement si $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\geq 0 \quad \forall p,q\geq N \quad \sup_{x\in E}\|f_p(x)-f_q(x)\|_F\leq\varepsilon$.

Théorème 6. *On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues. Alors f est continue.*

Remarque 7. Ce théorème admet deux réciproques partielles avec des hypothèses de monotonie, connues sous le nom de théorèmes de Dini. On les rappelle ici :

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur I.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et croissantes qui converge simplement vers f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur I.

Remarque 8. Le théorème 6 est mis en défaut par l'exemple 4 dans le cas où la convergence n'est pas uniforme. En effet, dans cet exemple les fonctions f_n sont toutes $\mathcal{C}^\infty$, pourtant la limite n'est pas continue.

Corollaire 9. *(Théorème d'interversion des limites)*

On suppose que F est complet. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de E vers F, convergeant uniformément sur E vers une application $f\colon E\to F$. Soit $a\in E$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la limite $b_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe. Alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite b et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

1.2 Séries de fonctions

On se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F.

Définition 10. *On appelle série des fonctions f_n, et on note $\sum f_n$, la suite (S_n) où S_n désigne l'application $S_n\colon x\mapsto\sum_{k=0}^n f_k(x)$ de E dans F.*

Définition 11. *Lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers f. On note alors $f=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.*

Exemple 12. La série de fonction $\sum f_n$, où $f_n(x) = x e^{-nx}$ converge simplement vers $f\colon x\mapsto\frac{x}{1-e^{-x}}$.

Définition 13. *On dit qu'une série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur E si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur E.*

Proposition 14. *Soit $\sum f_n$ simplement convergente. Pour que $\sum f_n$ converge uniformément sur E, il faut et il suffit que la suite des restes (R_n) définie par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ converge uniformément vers zéro dans E.*

Théorème 15. *(Critère de Cauchy uniforme, version séries de fonctions). On suppose que F est complet. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur E si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p > q \geq N \quad \sup_{x \in X} \|f_q(x) + \cdots + f_p(x)\| \leq \varepsilon.$$

Définition 16. *On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur E si il existe une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \text{ et la série } \sum \alpha_n \text{ converge.}$$

Théorème 17. *On suppose que F est complet. Alors la convergence normale implique la convergence uniforme.*

Exemple 18. La série de fonction $\sum f_n$ où $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}$ converge uniformément mais pas normalement.

1.3 Séries entières

Définition 19. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe.*

Proposition 20. *(Lemme d'Abel)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 21. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence R de la série entière par :*

$$R := \sup \{r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Proposition 22. *D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < R$ et diverge pour tout $|z| > R$.*

Exemple 23. La série $\sum_n n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence $R = 1$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$.

Théorème 24. *L'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $D(0, R)$.*

Corollaire 25. *La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \quad \text{donc} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p.$$

Remarque 26. On a pas de telle propriétés sur le cercle de convergence $C(0, R)$.

Par exemple, $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ n'est pas continue en $z = 1$, mais $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ l'est.

Développement 1 :

Théorème 27. *(Théorème d'Abel angulaire)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$ et on fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose de plus

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{1 - \rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\}.$$

Alors on a $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Théorème 28. *(Théorème taubérien faible)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$.
Si de plus $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2 Suites de fonctions et intégration

On fixe $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f_n : X \to F$ une suite de fonctions.

2.1 Suites de fonctions dans L^p

Définition 29. *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers $f: X \to F$ s'il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et f converge simplement vers f sur $X \setminus N$.*

Définition 30. *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p si $\|f_n - f\|_{L^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Exemple 31. Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, on pose, pour $n \geq 0$ et $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, $f_{2^n+k} = \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}$. Alors $\|f_n\|_p = 2^{-n/p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas λ-p.p.

Remarque 32. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(L^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $f\in L^p(\mu)$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers f, on peut extraire une sous-suite convergente λ-p.p de f_n.

2.2 Interversion entre limite, série, et intégrale

Théorème 33. *(de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers $f=\lim_n f_n$. Alors f est mesurable et

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Théorème 34. *(Lemme de Fatou)*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Exemple 35. Pour $f_n=\mathbf{1}_{[n,+\infty]}$, on a $\liminf_n f_n=0$ et $\int_X f_n\, d\mu=+\infty$, donc l'inégalité ci-dessus n'est pas une égalité en général.

Théorème 36. *(Théorème de convergence dominée)*

On considère un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ mesurables à valeurs complexes. On suppose qu'il existe une fonction $f\colon X\to\mathbb{C}$ telle que :

1. *Pour presque tout $x\in X$, $f_n(x)\to f(x)$.*
2. *Il existe $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in X,\quad |f_n(x)|\leq g(x)$.*

Alors f est intégrable on a

$$\int_X f_n(t)\, dt \underset{n\to\infty}{\to} \int_X f(t)\, dt \quad \text{et même} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n-f|\, d\mu=0.$$

Exemple 37. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f\in L^1(\mu)$.

Alors on a $n\mu(\{|f|\geq n\})\underset{n\to\infty}{\to}0$. Ce résultat généralise l'inégalité de Marokv.

Développement 2 :

Application 38. *(Riesz-Fischer pour $p<\infty$)*

Pour tout $p\in[1,+\infty[$, $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

3 Analyse de Fourier

3.1 Séries de Fourier : résultats généraux

On se place sur le tore $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on note simplement λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{T}$.

Définition 39. *Pour $f\in L^1(\mathbb{T})$ et $n\in\mathbb{Z}$, on définit le $n^{\text{ème}}$ coefficient de* FOURIER *de f par*

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-\mathrm{i}nt}\, dt.$$

On appelle série de FOURIER *associée (formellement) à f la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\, e^{int}$, et on note $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à cette dernière.*

Théorème 40. *(Lemme de Riemann Lebesgue)*

Pour tout $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on a $\hat{f}(n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Théorème 41. *(Théorème de Dirichlet)*

Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{T}$. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{T}$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\, e^{inx}=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Exemple 42. La fonction $f\in L^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ définie par $f(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\sin\big[(2^{p^3}+1)\cdot\frac{x}{2}\big]$ est continue sur $\mathbb{T}$, mais sa série de Fourier diverge en zéro.

3.2 Convergence L^2 et au sens de Césaro

Théorème 43. *L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(x)\overline{g(x)}\, dx$ est un espace de Hilbert, et la famille $(t\mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.*

Corollaire 44. *Soit $f\in L^2(\mathbb{T})$. Alors*

1. $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|^2\, dt,$

2. $f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int}$, *la convergence étant au sens de la norme de* $L^2(\mathbb{T})$,
3. *l'application* $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *est une isométrie linéaire bijective,*
4. *pour tout* $g \in L^2(\mathbb{T})$, *on a* $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

Définition 45. *On dit qu'une suite de fonctions* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *intégrables sur* $\mathbb{T}$ *est un « bon noyau » lorsqu'elle vérifie :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(x)\,dx = 1$,
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\,dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\delta\le|x|\le\pi} |K_n(x)|\,dx = 0$.

Théorème 46. *Soit* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un bon noyau et* $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. *Pour tout point de continuité* x *de* f, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f *est continue partout sur* $\mathbb{T}$, *alors la limite est uniforme.*

Définition 47. *On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer les suites de fonctions respectives* $(D_N)_{N\ge1}$ *et* $(F_N)_{N\ge1}$ *définies sur* $\mathbb{T}$ *par :*

$$\forall N \ge 1 \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \quad \text{et} \quad F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Développement 3 :

Théorème 48. *(Théorème de Féjer)*

Pour tout $x \in \mathbb{T}$ *non nul, on a* $F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, *et le noyau de Féjer est un bon noyau, et* $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *uniformément au sens de Césaro.*

4 Application en probabilités

4.1 Série génératrice d'une variable aléatoire discrète

Définition 49. *On définit la fonction (ou série) génératrice de* X *comme la série entière* $G_X(t) := \sum_{k\ge0} \mathbb{P}(X=k)t^k$.

Proposition 50. *Le rayon de convergence* R *de la série entière* $G_X(t)$ *est supérieur ou égal à 1. La fonction* $t \mapsto \mathbb{E}[t^X]$ *est bien définie et à valeurs finies pour* $t \in]-R, R[\cup \{-1, 1\}$, *et vérifie alors* $\mathbb{E}[t^X] = G_X(t)$.

Proposition 51.

1. *La fonction génératrice de* X *sur* $[-1,1]$ *détermine entièrement la loi de* X.
2. *Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors* $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Développement 4 :

Théorème 52. *La variable aléatoire* X *est d'espérance finie si et seulement si* G_X *est dérivable à gauche au point 1, et dans ce cas, on a* $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.

***Exemple* 53.** *On effectue des jeux de pile ou face successifs indépendants, avec probabilité* $p \in]0,1[$ *de faire face, et* $1-p$ *de faire pile. On s'arrête lorsque l'on obtient deux faces consécutives. En moyenne, il faut* $\frac{1+p}{p^2}$ *répétitions.*

Exemple 54. Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha)$, $G_X(t) = (1-\alpha)\frac{s}{1-\alpha s}$, et on en déduit $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1-\alpha}$.

4.2 Séries de variables aléatoires indépendantes : quelques notions

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, avec $X_i \in L^1(\mathbb{P})$.

Proposition 55. *On suppose que* $X_i \ge 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$. *Alors la série* $\sum X_i$ *converge presque sûrement vers une variable* $X = \sum_{i=0}^{+\infty} X_i$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si de plus $X_i > 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *on a* $\mathbb{E}[X] = +\infty$. *En particulier,* $\mathbb{P}(X \ge k) > 0$ *pour tout* $k \ge 0$.

Proposition 56. *(Loi forte des grands nombres). La suite* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement au sens de Césaro vers* $\mathbb{E}[X_1]$. *Si* $\mathbb{E}[X_1] = 0$, *on a* $\sum_{i=0}^{n} X_i = o(n)$ *p.s.*

Dorénavant, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la somme partielle.

Proposition 57. *(Théorème central limite). On suppose* $X_i \in L^2$, *on note* $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. *Alors* $\sqrt{n}(S_n/n - \mu)$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. *De façon heuristique, si* $\mathbb{E}[X_1] = 0$, *on a «* $S_n = \mathcal{N}(0,\sigma^2) + o(\sqrt{n})$ *». Mais ceci, en plus d'être mal défini, ne concerne qu'une convergence en loi.*

Théorème 58. *(Loi du logarithme itéré, admis). Presque sûrement, on a :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}}\right| \le 1.$$