P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Devs :

- Fonction Gamma
- Polynômes orthogonaux
- Théorème Central Limite

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Zuily-Quéffélec, Analyse pour l'agrégation
3. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
4. Barbe-Ledoux, Probabilités
5. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
6. Ojectif Agrégation
7. Hauchecorne, Contre-exemples en mathématiques

1 Régularité des intégrales à paramètres

On se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1.1 Continuité

Théorème 1. *(Théorème de convergence dominée)*
On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ mesurables à valeurs complexes. On suppose qu'il existe une fonction $f: X \to \mathbb{C}$ telle que :

1. *Pour presque tout $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.*
2. *Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X, \quad |f_n(x)| \leq g(x)$.*

Alors f est intégrable on a

$$\int_X f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int_X f(t)\,dt \quad \text{et même} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

On en déduit le théorème suivant sur la continuité des intégrales à paramètres.

Application 2. (Continuité sous l'intégrale)
On considère Y un espace métrique et $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que :

1. Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue.
3. Il existe $g \in L^1(\mu)$ positive telle que $\forall y \in Y \quad \forall x \in X \quad |f(x, y)| \leq g(x)$

Alors l'application F définie sur Y par $F(y) = \int_X f(x, y)\,dx$ est continue.

Remarque 3.
Pour que F soit continue en un point $y_0 \in Y$, il suffit que les hypothèses du théorème soient vérifiées en remplaçant Y par un compact $K \subset Y$ contenant y_0. En effet, la continuité (comme la dérivabilité, que nous abordons par la suite) est une notion locale.
C'est pourquoi, si Y est un espace métrique localement compact (c'est-à-dire tel que tout point admette un voisinnage ouvert de fermeture compacte), on peut utiliser ce théorème sur tout compact de Y, ce qui donne souvent une hypothèse de domination plus simplement. On en déduit la continuité sur Y tout entier.

Exemple 4. La fonction Γ, définie par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ sur $]0, +\infty[$, est continue sur $]0, +\infty[$.

Exemple 5.
L'application $f: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & x e^{-xt} \end{array} \right.$ est continue, mais $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t)\,dt$ n'est pas continue en zéro. De fait, $\mathbb{R}_+$ n'est pas localement compact donc la remarque 3 ne s'applique pas, et on n'a pas d'hypothèse de domination globale pour la fonction f.

1.2 Dérivabilité

Théorème 6. *(Dérviation sous l'intégrale)*
Soit $f: \left\{ \begin{array}{ccc} X \times I & \to & \mathbb{C} \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array} \right.$ une fonction vérifiant

- *Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur X.*
- *Pour presque tout $t \in X$, $x \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I.*

- *Il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et pour presque tout $t \in X$.*

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(t)$ est dérivable sur I et on a

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, d\mu(t).$$

Remarque 7. La remarque 3 s'applique également à ce théorème. En particulier, elle s'applique dès que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, puisque tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est localement compact.

Il faut toutefois faire attention à ce que la fonction obtenue après domination soit bien intégrable, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 8. On considère l'application $f: \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & x^2 e^{-t|x|} \end{array} \right.$.

La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (2 - t\,|x|)\, x e^{-t\,|x|}$. Pour un compact K contenant zéro et $M = \max_{x \in K} |x|$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2Me^0 + tMe^0 = (2+t)\,M \notin L^1([0,+\infty[).$$

On ne peut pas trouver d'hypothèse de domination convenable en zéro. On montre en fait que $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$ n'est pas dérivable en zéro car on a $F(x) = |x|$.

Remarque 9. En prenant $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage, on retrouve le théorème de dérivation des séries de fonctions normalement convergentes.

Exemple 10. La fonction $z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 11. *(Dérviation k fois sous l'intégrale)*

Soit $f: \left\{ \begin{array}{lll} X \times I & \to & \mathbb{C} \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array} \right.$ une fonction vérifiant

- *Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur X.*
- *Pour presque tout $t \in X$, $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
- *Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, il existe $g_j \in L^1(\mu)$ telle que $\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x,t)\right| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et pour presque tout $t \in X$.*

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a, pour tout $j \leq k$:

$$F^{(j)}(x) = \int_X \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x,t)\, d\mu(t).$$

Exemple 12. La fonction $\Gamma: z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exemple 13. Une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque de convergence.

1.3 Holomorphie

Théorème 14. *(Holomorphie sous l'intégrale)*

Soit $f: \left\{ \begin{array}{lll} X \times \Omega & \to & \mathbb{C} \\ (t,z) & \mapsto & f(t,z) \end{array} \right.$ une fonction vérifiant

- *Pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto f(t,z)$ est intégrable sur X.*
- *Pour presque tout $t \in I$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur Ω.*
- *Il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\left|\frac{\partial}{\partial z} f(z,t)\right| \leq g(t)$ pour tout $z \in \Omega$ et pour presque tout $t \in X$.*

Alors la fonction $F: z \mapsto \int_X f(t,z)\, d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,t)\, d\mu(t).$$

Développement 1 :

Théorème 15. *La fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0 = \{\mathrm{Re} > 0\}$.*

Elle se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z \cdot n!}.$$

Remarque 16. Dans le cas des intégrales semi-convergentes, on se ramène souvent via une intégration par parties à une situation où on peut utiliser ces théorèmes.

2 Convolution et régularisation

2.1 Définitions et propriétés

On se donne $d \geq 1$, $p, q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit qu'ils sont des exposants conjugués). Dans la suite, on note plus simplement $L^r = L^r(\mathbb{R}^d, \lambda)$ pour $r \in [1,+\infty]$.

On rappelle le théorème suivant, que l'on admet ici.

Théorème 17. *(Admis)*
L'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

Définition 18. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On appelle translatée de a de la fonction f la fonction $\tau_a f$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$.*

Proposition 19. *Si $1 \leq p \leq +\infty$, alors pour tout $f \in L^p$, l'application $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue.*

Définition 20. *Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Proposition 21. *L'application $*$ est bien définie sur $L^p \times L^q$. C'est une forme bilinéaire symétrique, et elle vérifie de plus*

$$\forall (f,g) \in L^p \times L^q \qquad \operatorname{Supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{Supp}(f) + \operatorname{Supp}(g)}.$$

Proposition 22. *Pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, la fonction $f*g$ est uniformément continue, bornée et vérifie*

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Théorème 23. *(Inégalité de Young)*
Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors on peut encore définir $f*g$ et si l'on pose $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, on a $f*g \in L^r$ et

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\, \|f\|_q.$$

Proposition 24. *(Régularisation par convolution)*
On suppose ici $d=1$. Soit $f \in L^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $g \in L^q$. Alors $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

2.2 Approximations de l'unité sur $\mathbb{R}^d$ et bons noyaux sur $\mathbb{T}$

Définition 25. *On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{R}^d$ est une approximation de l'unité lorsqu'elle vérifie :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x)\, dx = 1$,
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |K_n(x)|\, dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{\delta \leq |x| < +\infty} |K_n(x)|\, dx = 0$.

Exemple 26. La suite $(K_n)_{n \geq 0}$ définie par $K_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-n\pi x^2}$ est une approximation de l'unité.

Exemple 27. Soit $\varphi \in L^1$ d'intégrale 1. La suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ définie par $\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx)$ est une approximation de l'unité.

Proposition 28. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Si $f \in L^p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \phi_n \in L^p$ et on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f * \phi_n - f\|_p = 0.$$

Application 29. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

On se place sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La définition 25 est encore valable en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par $\mathbb{T}$ et en prenant pour mesure $d\tilde{\lambda} := \frac{1}{2\pi} d\lambda$, où λ désigne la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathbb{T}$. On appelle alors « bon noyau » une approximation de l'unité sur $\mathbb{T}$, et on obtient un théorème similaire à la proposition 28.

Théorème 30. *Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un bon noyau et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Pour tout point de continuité x de f, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors la limite est uniforme.

Définition 31. *On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer les suites de fonctions respectives $(D_N)_{N \geq 1}$ et $(F_N)_{N \geq 1}$ définies sur $\mathbb{T}$ par :*

$$\forall N \geq 1 \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \quad \text{et} \quad F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Théorème 32. *(Théorème de Féjer)*
Pour tout $x \in \mathbb{T}$ non nul, on a $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, et le noyau de Féjer est un bon noyau.
Cela signifie en particulier, que pour une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$, la somme partielle de ses coefficients de Fourier $S_N(f)$ définie sur $\mathbb{T}$ par $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int} = (f * D_N)(t)$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f.

3 Transformée de Fourier et applications

3.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 33. *On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx.$$

On utilise la notation $f(x) \to \hat{f}(\xi)$ pour signifier que $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Proposition 34. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On a*

- $f(x+h) \to \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi h\xi}$,
- $f(x)\, e^{-2i\pi x h} \to \hat{f}(\xi + h)$,
- $f(\delta x) \to \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1}\xi)$.

Supposons de plus que f est dérivable et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors

- $f'(x) \to 2i\pi\, \hat{f}(\xi)$,
- $-2i\pi x\, f(x) \to \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$.

Définition 35. *On appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$ l'espace*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,:\, \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k\, |f^{(\ell)}(x)| < \infty \right\}.$$

Exemple 36. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 37. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Exemple 38. Si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Proposition 39. *On reprend l'approximation de l'unité $(K_n)_{n \geq 0}$ définie par $K_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-n\pi x^2}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a de plus :*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \|f * K_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corollaire 40. *(Formule d'inversion de Fourier)*
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

En particulier, $\mathcal{F}\colon f \mapsto \hat{f}$ est une bijection sur l'espace de Schwartz.

Corollaire 41.
La transformée de Fourier est injective sur L^1.

On donne une application de ce résultat à la théorie des bases hilbertiennes.

Définition 42. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids sur I une application $\rho\colon I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n\, \rho(x)\, dx \;<\; \infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrales sur I par rapport à la mesure dont la densité est ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 43. *$L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)}\, \rho(x)\, dx$$

Proposition 44. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour $\langle .,. \rangle_\rho$, tels que $\deg(P_n) = n$. Elle s'appelle la famille de polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.*

Développement 2 :

Théorème 45. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids sur I. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\, \rho(x)\, dx \;<\; \infty$$

Alors la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

3.2 Application en probabilités

Définition 46. *Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la fonction de répartition F_X de X par $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et la fonction caractéristique φ_X de X par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.*

Théorème 47. *(Théorème et définition, Paul Levy)*
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. *On a $\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point t où F_X est continue.*

ii. *On a $\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \phi(X_n)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \phi(X)\, d\mathbb{P}$ pour toute fonction $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée.*

iii. On a $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

iv. Il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ *sur lequel sont définies une variable aléatoire* X' *et une suite de variables aléatoires* $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* X *et* X' *soient de même loi,* X_n *et* X'_n *soient de même loi pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et la suite* $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\mathbb{P}'$*-presque-sûrement vers* X'.

On dit alors que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers* X*, et on note* $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$.

Proposition 48. *Soit* X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *suivant une loi normale centrée réduite. Alors la fonction caractéristique* φ_X *de* X *vérifie*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Développement 3

Théorème 49. *(Théorème central limite)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On suppose que* $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et on note* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_0)$ *et* $\mu = \mathbb{E}[X_0]$*. On suppose de plus que* $\sigma^2 > 0$.

Par hypothèse, on a donc $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ *et* $\mathbb{E}[X_n] = \mu$*pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

On note également $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *pour tout* $n \geq 1$.

On a alors la convergence en loi

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$