P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables.

Devs :

- Transformée de Fourier de la gaussienne et théorème central limite
- Fonction Gamma

Références :

1. Brianes-Pagès, Théorie de l'intégration
2. Gourdon, Analyse
3. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles
4. Rudin, Analyse réelle et complexe
5. Zuiliy-Quéffélec, Analyse pour l'agrégation
6. Ouvrard, Probabilités 2
7. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
8. Pabion, Elements d'analyse complexe

1 Techniques de calcul d'intégrales

1.1 Calcul de primitives. Premières méthodes.

Théorème 1. *(Fondamental du calcul intégral).*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$.

Remarque 2. Pour calculer certaines intégrales, on est donc amené à rechercher des primitives des fonctions dans l'intégrande.

Exemple 3. On a $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} \operatorname{Arctan}(A) - \operatorname{Arctan}(-A) = \pi$.

Exemple 4. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est finie si et seulement si $\alpha > 1$.

Méthode 5. *Pour calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$, on commence par décomposer F en éléments simples. On est ramené à calculer des primitives de la forme*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^h} \quad \text{et} \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}\, dx \quad \text{avec } h \in \mathbb{N}^* \text{ et } c^2 - 4d < 0.$$

Pour calculer la deuxième primitive, on met le dénominateur sous forme canonique :

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} = \frac{2\alpha\,(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h} + \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^h}.$$

L'intégrale $\int \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^h}\, dx$ se calcule avec un changement de variable, en se ramenant à une intégrande de la forme $\frac{1}{1+\theta^2}$.

Exemple 6. On a $\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right) + C$

Méthode 7. On veut calculer les primitives de la forme $\int \sin^m(x) \cos^n(x)\, dx$. On distingue deux cas :

- L'un des entiers n ou m est impair (par exemple $n = 2p+1$). On a alors
$$\int \sin^m(x) \cos^n(x)\, dx = \int \sin^m(x)\, (1 - \sin^2(x))^p \cos(x)\, dx.$$
On effectue alors le changement de variable $t = \sin(x)$.
- Les deux entiers n et m sont pairs. On linéarise, en exprimant $x \mapsto \sin^m(x) \cos^n(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ et $x \mapsto \sin(kx)$, avec les formules d'Euler.

Exemple 8. On a $\int \cos^4(x)\, dx = \int \frac{\cos(4x)}{8}\, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx + \int \frac{3}{8}\, dx$.

1.2 Intégration par partie et changement de variable

Théorème 9. *Soit $u, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Exemple 10. (Intégrale de Wallis).

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,dx$. Alors pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a

$$I_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}\text{ et }I_{2p+1}=\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1}.$$

On en déduit que $I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exemple 11. La fonction Γ, définie sur $]0,+\infty[$ par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ vérifie $\Gamma(n+1)=n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et se prolonge ainsi à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.

Théorème 12. *(Changement de variable). Soit $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue par morceaux telle que $\varphi([a,b])\subseteq I$. Alors*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(u)\,du.$$

Théorème 13. *Soit $x\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $t=\tan(x/2)$. Alors on a $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$.*

Remarque 14. On veut calculer une primitive d'une fonction rationnelle de la forme $R(\sin(x),\cos(x))$, où $R\in\mathbb{R}(X,Y)$. Cela est toujours possible via le changement de variable $t=\tan(x/2)$, qui ramène, d'après le théorème 10, le calcul à celui d'une primitive d'une fonction rationnelle. Cependant, cette méthode est généralement fastidieuse.

Méthode 15. (Règles de Bioche).

On peut parfois simplifier le calcul de $R(\sin(x),\cos(x))$ en essayant d'effectuer l'un des changements de variable $t=\sin(x)$, $t=\cos(x)$ ou $t=\tan(x)$. On suit pour cela les règles de Bioche :

- Si $R(\sin(x),\cos(x))\,dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi-x$, on pose $t=\sin(x)$.
- Si $R(\sin(x),\cos(x))\,dx$ reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose $t=\cos(x)$.
- Si $R(\sin(x),\cos(x))\,dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi+x$, on pose $t=\tan(x)$.

Exemple 16. Pour calculer $\int\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, on pose $t=\cos(x)$. On en déduit que

$$\int\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx=\cos(x)-2\arctan(\cos(x))+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

1.3 Calcul des intégrales multiples

Théorème 17. *(Changement de variables sur $\mathbb{R}^d$).*

Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $\mathbb{R}^d$. On note $\lambda_D=\mathbf{1}_D\cdot\lambda$, la restriction de la mesure de Lebesgue sur D. Alors on a :

- $\lambda_D=\varphi(|J_\varphi|\cdot\lambda_\Delta)$
- *Pour toute fonction borélienne $f\colon D\to\mathbb{R}_+$,*
$$\int_D f(x)\,dx=\int_\Delta f(\varphi(u))|J_\varphi|\,(u)\,du.$$
- *Pour toute fonction borélienne $f\colon D\to\mathbb{C}$, f est λ_D-intégrable sur D si et seulement si $(f\circ\varphi)\,|J_\varphi|$ est λ_Δ-intégrable sur Δ, et, dans ce cas,*
$$\int_D f(x)\,dx=\int_\Delta f(\varphi(u))|J_\varphi|\,(u)\,du.$$

Exemple 18. (Coordonnées polaires).

Le diffeomorphisme $\varphi\colon\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_-\times\{0\})\\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta),r\sin(\theta))\end{cases}$ a pour jacobien $J_\varphi(r,\theta)=r>0$.

Exemple 19. (Volume de la boule unité).

On définit $B_d:=\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,x_1^2+\cdots+x_d^2\leq 1\}$, et $v_d:=\lambda_d(B_d)$. Alors on a

$$v_d=\frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}\text{ si }d\text{ est pair, et }v_d=\frac{2^d\,\pi^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d-1}{2}\right)!}{d!}\text{ si }d\text{ est impair.}$$

Théorème 20. *(Fubini-Tonelli)*

Soit X,Y des parties de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ et $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}_+$ une application mesurable positive. Alors les fonctions $y\mapsto\int_X f(x,y)\,dx$ et $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,dy$ sont mesurables et on a

$$\int_{X\times Y}f(x,y)\,dx\,dy=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Théorème 21. *(Fubini-Lebesgue)*

Soit X,Y des parties de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ et $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ mesurable. On suppose que :

$$\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|\,dy\right)dx<+\infty\quad\text{ou que}\quad\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|\,dx\right)dy<+\infty$$

Alors les fonctions $y\mapsto\int_X f(x,y)\,dx$ et $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,dy$ sont intégrables et on a :

$$\int_{X\times Y}f(x,y)\,dx\,dy=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Exemple 22. (Calcul de l'intégrale gaussienne).

On a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2 Utilisation d'autres outils de l'analyse

2.1 Utilisation de suites et de séries de fonctions

Théorème 23. *(De convergence monotone).*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers $f = \lim_n f_n$. Alors f est mesurable et

$$\int_X f\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu.$$

Théorème 24. *(Lemme de Fatou).*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_n f_n\,d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\,d\mu.$$

Développement 1 :

Proposition 25. *Pour tout $z \in \Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, on a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt.$$

Théorème 26. *La fonction Γ définie par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler*

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^- \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z \cdot n!}.$$

2.2 Intégrales à paramètres

Application 27. (Continuité sous l'intégrale)
On considère Y un espace métrique et $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que :

1. Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue.
3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que $\forall y \in Y \quad \forall x \in X \quad |f(x, y)| \leq g(x)$

Alors l'application F définie sur Y par $F(y) = \int_X f(x, y)\,dx$ est continue.

Théorème 28. *(Dérivation sous l'intégrale)*
Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f: \begin{cases} I \times J & \to \mathbb{C} \\ (t, x) & \mapsto f(t, x) \end{cases}$ une fonction vérifiant

- *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur I.*
- *Pour presque tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur J.*
- *Il existe $g \in L^1(I)$ telle que $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\right| \leq g(t)$ pour tout $x \in J$ et pour presque tout $t \in I$.*

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_I f(t, x)\,dt$ est dérivable sur I et on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\,dt.$$

Développement 2

Proposition 29. *Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi normale centrée réduite. Alors la fonction caractéristique φ_X de X vérifie*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Théorème 30. *(Théorème central limite)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X_0)$ et $\mu = \mathbb{E}[X_0]$. On suppose de plus que $\sigma^2 > 0$.
Par hypothèse, on a donc $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\operatorname{Var}(X_n) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}[X_n] = \mu$pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note également $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.
On a alors la convergence en loi

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Théorème 31. *(Formule d'inversion de Fourier)*
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

En particulier, $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ est une bijection sur l'espace de Schwartz.

2.3 Utilisation du théorème des résidus

Dans cette partie, on se donne Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 32. *Un chemin $\gamma: [0, 1] \to \Omega$ est appelé un lacet lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 33. *Soit γ un lacet sur Ω. Alors pour tout $z\in\Omega\setminus\langle\gamma\rangle$ on définit*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposition 34. *La fonction Ind_γ est à valeus entières sur $\Omega\setminus\langle\gamma\rangle$, constante sur chaque composante connexe de $\Omega\setminus\langle\gamma\rangle$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\langle\gamma\rangle$.*

Théorème 35. *(Cauchy sur un ensemble convexe)*

On suppose ici que Ω est convexe. Soit γ un lacet sur Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Si $z\in\Omega$ et si $z\notin\langle\gamma\rangle$, alors on a

$$f(z)\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Exemple 36. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$.

Exemple 37. On a $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-\pi/4)^6}dz = \frac{\pi i\sqrt{2}}{120}$, où $\gamma(t)=e^{it}$ pour $t\in[0,2\pi]$.

Théorème 38. *Soit $a\in\Omega$ et $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$. Alors on est dans l'un des trois cas suivants :*

1. *f a une singularité artificielle en a.*
2. *Il existe $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{C}$ avec $c_m\neq 0$ tels que $f(z)-\displaystyle\sum_{k=1}^m\frac{c_k}{(z-a)^k}$ ait une singularité artificielle en a (on dit que f a un pôle d'ordre a).*
3. *Si $r>0$ et $D(a,r)\subset\Omega$, l'image $f(\overline{D(a,r)})$ est dense dans le plan complexe. On dit que f a une singularité essentielle en a.*

Définition 39. *Soit $f\in H(\Omega\setminus A)$ admettant des poles en tout point de A. Si $f-\displaystyle\sum_{k=1}^m\frac{c_k}{(z-a)^k}$ a une singularité artificielle en a, on appelle résidu de f en a et on note $\mathrm{Res}(f,a)=c_1$ le coefficient devant $\dfrac{1}{z-a}$.*

Proposition 40. *(Calcul pratique des résidus).*

On suppose que F est une fonction holomorphe qui présente en a un pôle simple. On suppose de plus que localement en a, F se met sous la forme d'un quotient $F=\dfrac{G}{H}$, avec G,H holomorphes, $G(a)\neq 0$, $H(a)=0$ et $H'(a)\neq 0$. Alors $\mathrm{res}(F,a)=\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{G(z)}{H'(z)}$.

Exemple 41. La fonction $\varphi\colon z\mapsto\dfrac{e^z}{1+z^2}$ a deux pôles simples i et $-i$, et $\mathrm{res}(\varphi,i)=\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{e^z}{2z}=\frac{e^i}{2i}$.

La fonction $\varphi\colon z\mapsto\dfrac{z^3}{1+z^4}$ a quatre pôles simples, les racines $4^{\text{èmes}}$ de -1. Pour chaque pôle ζ, on a

$$\mathrm{res}(\varphi,\zeta)=\lim_{z\to\zeta}\frac{z^3}{4z^3}=\frac{1}{4}.$$

Théorème 42. *(Théorème des résidus).*

Soit $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ et A l'ensemble des pôles de f dans Ω. Soit γ un lacet à valeur dans $\Omega\setminus A$, tel que $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=0$ pour tout $\alpha\notin\Omega$. Alors $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{\alpha\in A}\mathrm{Res}(f,a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)$.

Exemple 43. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}$.

3 Calcul approché d'intégrales

3.1 Méthodes de quadrature

On se place dans $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ et $\sigma=\{\alpha<x_1<\cdots<x_{n-1}<\beta\}$ une subdivision de $[\alpha,\beta]$. Sur chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$, on choisit des points $(\xi_{ij})_{0\leq j\leq\ell_i}$ et des poids ω_{ij} tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{ij}=1$.

On approche l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx$ par $(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{ij}f(\xi_{ij})$.

Le problème est de choisir convenablement les ξ_{ij} et les poids ω_{ij} de façon à minimiser l'erreur.

Définition 44. *On dit qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si la formule approchée est exacte pour tout $f\in\mathbb{R}_n[X]$ et inexacte pour au moins un $f\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$.*

Remarque 45. Les méthodes de quadratures sont toujours exactes sur $\mathbb{R}_0[X]$ donc d'ordre au moins zéro.

Exemple 46. Cas simple : $\ell_i=0$ pour tout i. On choisit un seul point $\xi_i\in[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ et on remplace f sur $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ par $p_0(x)=f(\xi_i)$. Les choix les plus courants sont :

- $\xi_i=\alpha_i$: méthode des rectangles à gauche :
- $\xi_i=\alpha_{i+1}$: méthode des rectangles à droite :

.

- $\xi_i=\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}$: méthode du point milieu.

3.2 Méthode de Monte-Carlo

On souhaite évaluer $\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,g(x)\,dx$, où f est une densité sur $\mathbb{R}^d$ et $g\in L^1(f)$. Si Y est une variable aléatoire de densité f, $I=\mathbb{E}[g(Y)]$. Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un échantillon de Y, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(Y_i)\underset{\mathbb{P}-\mathrm{ps}}{\longrightarrow}I$ d'après la loi des grands nombres.

Cette méthode est moins efficace que les méthodes de quadrature en dimension 1, mais son efficacité ne dépend pas de la dimension de l'espace (elle est en $O(1/\sqrt{n})$), et elle est donc largement préférable en grande dimension (n'en déplaise à Owen ! :)).