P. Maurer
ENS Rennes

234. Fonctions et espace de fonctions Lebesgue-intégrables

Devs :

- Théorème de Radon-Nikodym
- Théorème de Riesz-Fischer

Références :

1. Brianes-Pagès, Théorie de l'intégration
2. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
3. Rudin, Analyse réelle et complexe

1 Intégration

On se donne $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Intégration par rapport à une mesure abstraite

Définition 1. *On dit qu'une fonction $f\colon X\to\mathbb{K}$ est étagée s'il existe $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$ et $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tels que $f=\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$.*

Remarque 2. Une fonction étagée est mesurable. On peut toujours se ramener au cas où $A_1,\ldots,A_n$ sont deux à deux disjoints.

Proposition 3. *Si $(A_i)_{1\le i\le n}$, et $(B_i)_{1\le i\le m}$ sont deux partitions finies et $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$, $(\beta_i)_{1\le i\le m}$ sont des scalaires tels que $f=\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}=\sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$, alors on a toujours*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i\,\mu(A_i)=\sum_{i=1}^n \beta_i\,\mu(B_i)$$

Définition 4. *Soit f une fonction étagée positive sur $(X,\mathcal{A})$. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par*

$$\int_X f d\mu \;=\; \sum_{i=1}^n \alpha_i\,\mu(A_i).$$

Exemple 5.

Si $\mu=\delta_a$ est la mesure de Dirac au point a et $f\colon X\to\mathbb{R}_+$ une fonction qui prend un nombre fini de valeurs, alors on a $\displaystyle\int_X f d\mu=f(a)$.

Si $\mu=m$ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ prend un nombre fini de valeurs, alors $\displaystyle\int_X f(n)dm(n)=\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.

Proposition 6. *Soit f une fonction étagée positive. Alors*

$$\int_X f d\mu<+\infty \iff \mu(\{f\neq 0\})<+\infty.$$

Proposition 7. *Soit f,g deux fonctions étagées positives. On a*

- $\displaystyle\int_X (f+g)\,d\mu=\int_X f d\mu+\int_X g d\mu$.
- $\displaystyle f\le g \Longrightarrow \int_X f d\mu\le\int_X g d\mu$.
- *Pour tout* $\lambda\ge 0$, $\displaystyle\int_X \lambda f d\mu=\lambda\int_X f d\mu$.

Définition 8. *Soit f une fonction mesurable positive. On pose*

$$\int_X f d\mu \;=\; \sup\left\{\int_X \varphi d\mu\,:\,\varphi\le f \text{ et } \varphi \text{ étagée positive}\right\}.$$

Proposition 9. *On a $\displaystyle\int_X f d\mu\in\overline{\mathbb{R}}_+$, et on dit que f est μ-intégrable si $\displaystyle\int_X f d\mu<+\infty$.*

Définition 10. *Soit $f\colon(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))$. On dit que f est μ-intégrable si $|f|$ est μ-intégrable, et on note $f\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ où $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ s'il n'y a pas d'ambiguité.*

Dans ce cas, on pose :

$$\int_X f \;=\; \int_X f^+\,d\mu-\int_X f^-\,d\mu \quad \text{si} \quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$$

$$\int_X f=\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu+i\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu \quad \text{si} \quad \mathbb{K}=\mathbb{C}$$

Où f^+ et f^- sont définies par les relations $|f|=f^++f^-$ et $f=f^+-f^-$.

Remarque 11. Si $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$, on a $\mu(\{|f|=+\infty\})=0$.

Exemple 12. Sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$, les fonctions m-intégrables sont les séries absolument convergentes. Sur $(X,\mathcal{P}(X),m)$, les fonctions m-intégrables sont les familles absolument sommables.

Proposition 13. *(Inégalité triangulaire)*

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, *on a* $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu$.

1.2 Théorèmes généraux

Théorème 14. *(de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers* $f = \lim_n f_n$. *Alors* f *est mesurable et*

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Théorème 15. *(Lemme de Fatou)*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\int_X \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Exemple 16. Pour $f_n = \mathbf{1}_{[n,+\infty]}$, on a $\liminf_n f_n = 0$ et $\int_X f_n\, d\mu = +\infty$, donc l'inégalité ci-dessus n'est pas une égalité en général.

Proposition 17. *(Inégalité de Markov)*

Soit f *une fonction mesurable positive. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, $\mu(\{f \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_X f d\mu$.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, $\mu(\{|f| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f|\, d\mu$.

Application 18. (Loi forte des grands nombres $\mathcal{L}^4$)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur Ω, indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 4. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-p.s}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}[X_0].$$

Théorème 19. *(Théorème de convergence dominée)*

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et une suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 0}$ *mesurables à valeurs complexes. On suppose qu'il existe une fonction* $f: X \to \mathbb{C}$ *telle que :*

1. *Pour presque tout* $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.
2. *Il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *positive telle que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X, \quad |f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors f *est intégrable on a*

$$\int_X f_n(t)\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(t)\, dt \quad \text{et même} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Exemple 20. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^1(\mu)$.

Alors on a $n\mu(\{|f| \geq n\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce résultat généralise l'inégalité de Marokv.

Application 21. (Continuité sous l'intégrale)

On considère Y un espace métrique et $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que :

1. Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue.
3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que $\forall y \in Y \quad \forall x \in X \quad |f(x, y)| \leq g(x)$

Alors l'application F définie sur Y par $F(y) = \int_X f(x, y)\, dx$ est continue.

2 Mesure de Lebesgue

2.1 Rappels de topologie

On se donne (X, τ) un espace topologique.

Définition 22.

On dit que (X, τ) *est séparé si pour tout* $x, y \in X$, *il existe un voisinnage* V *de* x *et un voisinnage* W *de* y *tels que* $V \cap W = \varnothing$.

On dit que (X, τ) *est localement compact si tout point de* X *admet un voisinnage dont la fermeture est compacte.*

Proposition 23. *Soit* X *un espace séparé et* K *un sous-espace compact de* X. *Soit* $p \in K^c$. *Il existe des ouverts* U *et* W *tels que* $p \in U$, $K \subset W$ *et* $U \cap W = \varnothing$.

On suppose dans la suite que (X, τ) est séparé et localement compact.

Théorème 24. *Soit* U *un ouvert de* X *et* $K \subset U$ *un compact. Il existe un ouvert* V *dont la fermeture est compact et qui vérifie* $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Théorème 25. *(Lemme d'Urysohn)*

Soit V *un ouvert de* X, *et* $K \subset V$ *un compact. Il existe* f *une fonction continue à support compact sur* X *telle que :*

- $\forall x \in X \quad 0 \leq f(x) \leq 1$.
- $\forall x \in K \quad f(x) = 1$.
- $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.

Corollaire 26. *(Partition de l'unité)*

Soit $V_1, \ldots, V_n$ des sous-ensembles ouverts de X, et K un compact de X tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

Il existe des fonctions continues $h_i\colon X \to [0,1]$ de support compact et inclu dans V_i, telles que

$$\forall x \in K \qquad h_1(x) + \cdots + h_n(x) = 1.$$

2.2 Construction de la mesure de Lebesgue

Théorème 27. *(Théorème de représentation de Riesz-Markov-Kakutani).* ***Admis.***
Soit (X, τ) un espace topologique séparé, et localement compact. Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$. Il existe une tribu $\mathcal{M}$ sur X qui contient $\mathcal{B}(X)$ et il existe une unique mesure positive μ sur $\mathcal{M}$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X) \quad \Lambda(f) = \int_X f d\mu.$$

En outre, cette mesure μ possède les propriétés suivantes.

1. *On a $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset X$.*
2. *Pour tout $E \in \mathcal{M}$, on a*
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V \text{ et } V \text{ ouvert}\}.$$
3. *Pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) < \infty$, on a*
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ et } K \text{ compact}\}.$$
4. *Si $E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$ et $\mu(E) = 0$, alors $A \in \mathcal{M}$.*

Remarque 28. Une mesure vérifiant les propriétés 2 et 3 est dite régulière.

Remarque 29. Idée de la preuve : on commence par construire μ sur les ouverts de X grâce au lemme d'Urysohn par $\mu(V) := \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ et } \mathrm{Supp}(f) \subset V\}$, puis on définit μ pour tout sous-ensemble $E \subset X$ par $\mu(E) := \inf\{\mu(V) : E \subset V \text{ et } V \text{ ouvert}\}$.
La difficulté est alors d'exhiber la tribu $\mathcal{M}$ sur laquelle μ ainsi définie sera σ-additive. Ceci se fait grâce à une succession de lemmes qui serait bien trop longue à détailler à l'oral.

Théorème 30. *(Existence de la mesure de Lebesgue)*
Il existe une unique mesure λ sur une tribu $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}$, appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, qui possède les propriétés suivantes :

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq b \Rightarrow \lambda([a,b]) = b - a.$
- $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad B \in \mathcal{M}$. *En outre, λ est régulière sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
- $\forall E \in \mathcal{M} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda(E + x) = \lambda(E)$ *: la mesure λ est invariante par translation.*

Remarque 31. Idée de la preuve : $\mathbb{R}$ est localement compact et séparé.

On considère l'intégrale de Riemann sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$: à toute fonction continue f sur $\mathbb{R}$ à support dans $[a,b]$, on associe $\Lambda(f) := \int_a^b f(x)\,dx$.

On applique ensuite le théorème de Riesz à la forme linéaire Λ, qui est positive car pour $f \geq 0$ on a $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. La mesure obtenue est λ, et elle est définie sur une tribu $\mathcal{M}$ qui contient les boréliens.

En particulier, l'intégrale de Riemann coïncide avec celle de Lebesgue sur tout compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Théorème 32. *(Lusin)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$. Soit A un ensemble tel que $\lambda(A) < +\infty$ et en dehors duquel f est nul. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

De plus, on peut modifier la fonction g de sorte que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Corollaire 33.
Sous les hypothèses du théorème de Lusin, et avec $|f| \leq 1$, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que $|g_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x).$$

Remarque 34. Avec les notations introduites dans la partie 3, ce corollaire montre en particulier que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

2.3 Mesures absolument continues

On rappelle le théorème de Riesz (dans le cas d'un espace de Hilbert).

Théorème 35. (de représentation de Riesz).
Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors l'application δ définie par

$$\mathcal{L}\colon \begin{cases} H & \to & H' \\ a & \mapsto & \mathcal{L}_a = (x \mapsto \langle x, a \rangle) \end{cases}$$

est une bijection antilinéaire isométrique.

On se donne $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Proposition 36. *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Alors $L^2(\mu)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par*

$$\forall f, g \in L^2(\mu) \qquad \langle f, g \rangle := \int_X f g d\mu,$$

est un espace de Hilbert.

Définition 37. *Soit μ et ν deux mesures sur $(X,\mathcal{A})$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ, et on note $\nu \ll \mu$, si pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A)=0 \Longrightarrow \nu(A)=0$.*

Développement 2 :

Théorème 38. (de RADON-NIKODYM)
Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures σ-finies sur $(X,\mathcal{A})$. Il y a équivalence entre :

1. *ν est absolument continue par rapport à μ.*
2. *$\exists f\colon (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ μ-intégrable telle que $\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A)=\int_A f d\mu$.*

En outre, la fonction f est unique (à une égalité μ-presque partout près).
On note $f=\frac{d\nu}{d\mu}$ et on dit que f est la dérivée de RADON-NIKODYM, ou la densité de ν par rapport à μ.

Remarque 39. Le résultat est faux si on ne suppose plus que μ est σ-finie.
On considère par exemple l'espace mesurable $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ muni respectivement de la mesure de comptage m et de la mesure de LEBESGUE λ.

Application 40. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a un espace probabilisé, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ toute variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

1. Y est $\mathcal{G}$-mesurable,
2. $\forall A \in \mathcal{G} \quad \mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_A]$.

Alors l'espérance conditionnelle $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sachant $\mathcal{G}$ existe, et est unique. On la note $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

3 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

On se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 41. *Pour $0<p<\infty$ et f une fonction mesurable sur X à valeurs complexes, on définit :*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ est constitué des fonctions mesurables $f\colon X \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p < \infty$.
Pour $p=+\infty$ et f une fonction mesurable sur X à valeurs complexe, on définit :

$$\|f\|_\infty := \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \ \mu(\{|f|>a\})=0)\}.$$

L'espace $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est constitué des fonctions mesurables $f\colon X \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_\infty < \infty$.

Remarque 42. Si μ est la mesure de comptage sur un espace dénombrable $(X, \mathcal{P}(X))$, on écrit souvent ℓ^p à la place de $\mathcal{L}^p$.

Proposition 43. *(Inégalité de Hölder)*
Pour $p \in [1,+\infty]$ et $q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Corollaire 44. *Si μ est finie (par exemple si μ est une probabilité), on a :*

$$\forall p \geq q \quad \mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^q(\mu).$$

Corollaire 45. *(Inégalité de Minkowski)*
Soit $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ avec $p \in [1,\infty]$, on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 46. *(Inégalité d'interpolation)*
Soit $1 \leq p, q \leq \infty$.
Si $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \cap \mathcal{L}^q(X,\mu)$ alors $f \in L^r(X,\mu)$ pour tout $r \in [p,q]$ et :

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_p^\alpha \cdot \|f\|_q^{1-\alpha}$$

Définition 47. *Soit $p \in [1,\infty]$. On définit l'espace $L^p(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq g\})=0$.*
On appelle encore f la classe de f dans $\mathcal{L}^p/\sim$.

Théorème 48. *Pour tout $p \in [1,\infty]$, l'espace $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Développement 1 :

Théorème 49. *(Riesz-Fischer)*
L'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

3.2 Convolution et régularisation

(Reprendre le plan de la 209)