P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles de séries numériques. Exemples et applications.

Devs :

- Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$
- Théorème d'Abel angulaire et Taubérien faible

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. El Amrani, Suites et séries numériques

Dans ce qui suit, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

On note $\sum u_n$ cette série, et on appelle somme partielle de $\sum u_n$ son terme général S_n.

Définition 2. *On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la somme de la série $\sum u_n$ et on la note :*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 3. La série géométrique $\sum a^k$ avec $a \in \mathbb{K}$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Sa somme est alors donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Définition 4. *On appelle série divergente une série qui n'est pas convergente. On appelle nature d'une série son caractère convergent ou divergent.*

Définition 5. *Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S, le nombre $R_n = S - S_n$ est appelé le reste d'ordre n de la série.*

Proposition 6. *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes d'ordre n converge vers zéro, et on a l'égalité*

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 7. *On ne change pas la nature d'une série en modifiant un ensemble fini des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 8. *Muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies par $\sum u_n + \sum v_n = \sum u_n + v_n$ et $\lambda \sum u_n = \sum \lambda u_n$, l'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.*

Proposition 9. *Si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro, on dit que $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Remarque 10. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$ converge vers zéro mais la série $\sum u_n$ diverge.

Définition 11. *On appelle série télescopique associée à une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série $\sum u_n$ où $u_n = a_{n+1} - a_n$.*

Proposition 12. *Une série télescopique associée à une suite est de même nature que cette suite.*

Exemple 13. La série $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

1.2 Critère de Cauchy et séries absolument convergentes

Théorème 14. *(Critère de Cauchy)*
Une série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Exemple 15. (Série harmonique)

On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, donc le critère de Cauchy n'est pas vérifié pour la série $\sum \frac{1}{n}$. C'est donc une série divergente.

Définition 16. *On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 17. *Toute série numérique absolument convergente est convergente.*

Remarque 18. Ce résultat est faux pour une série sur un espace vectoriel normé qui n'est pas complet.

Remarque 19. La réciproque du théorème 17 est fausse. Par exemple, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.

Définition 20. *On dit qu'une série convergente qui ne converge pas absolument est semi-convergente.*

1.3 Ordre des termes d'une série

Définition 21. *Soit $(n_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante, telle que $n_0 = 0$. A toute série $\sum u_n$, on associe la série de terme général*

$$v_k = \sum_{p=n_k}^{n_{k+1}-1} u_p.$$

Si on note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles associées aux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on a alors $T_k = S_{n_{k+1}-1}$.

Théorème 22. *(Sommation par paquets)*

1. *Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement et qu'il existe $p \geq 2$ tel que $n_{k+1} - n_k \leq p$ pour tout $k \geq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Définition 23. *On dit qu'une série $\sum u_n$ est commutativement convergente si pour toute permutation $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.*

Théorème 24. *Toute série absolument convergente est convergente, et sa somme reste inchangée par toute modification de l'ordre des termes.*

Remarque 25. La réciproque est vraie. Si $\sum u_n$ est semi-convergente, on peut ré-arranger les termes de la série de façon à ce qu'elle converge vers n'importe quelle limite. La démonstration de ce résultat est un peu technique, donc on l'admettra pour le plan.

2 Séries à termes positifs

2.1 Règles de comparaison

Proposition 26. *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles est majorée. Dans ce cas, on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n < +\infty$.*

Si la série diverge, alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. On écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = +\infty$.

Théorème 27. *(règle de comparaison)*
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs et $n_0 \geq 0$.
On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, ou bien que $u_n = o(v_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

- *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Exemple 28. Pour $n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. On en déduit que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 29. *(règle d'équivalence)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors :

- *Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*
- *En cas de convergence, leurs restes sont équivalents.*
- *En cas de divergence, leurs sommes partielles sont équivalentes.*

2.2 Séries de Riemann et de Bertrand

Théorème 30. *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

On donne deux applications de ce critère en probabilités.

Exemple 31. (Loi forte des grands nombres, cas L^4)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F})$, admettant un moment d'ordre 4. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathbb{P}\text{-p.s}}{\to}} \mathbb{E}[X_0].$$

Développement 1 :

Exemple 32. La marche aléatoire simple est récurrente sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}^2$. Elle est transiente sur $\mathbb{Z}^3$.

Corollaire 33. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

- *Si $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ avec $\alpha \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Théorème 34. *(Comparaison série-intégrale)*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a l'encadrement suivant :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n(t) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Corollaire 35. *(Séries de Bertrand)*
On appelle ainsi les séries de la forme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)} \text{ converge si et seulement si } ((\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)).$$

3 Séries à termes quelconques

3.1 Séries semi-convergentes

On rappelle qu'une série est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Définition 36. *On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n a_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de signe constant.*

Théorème 37. *(Critère spécial des séries alternées)*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers zéro. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et son reste R_n d'ordre n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Application 38. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et sa somme est une fonction continue sur $[0, 1]$.

3.2 Transformation d'Abel

Proposition 39. *(Transformation d'Abel)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On note $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.
Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k-1}) S_k.$$

Remarque 40. La transformation d'Abel est aux séries ce que l'intégration par partie est aux intégrales.

Théorème 41. *(Règle d'Abel)*
Soit $\sum u_n$ une série numérique. On suppose que $u_n = \alpha_n v_n$, où

- *$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et qui converge vers zéro.*
- *La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)_{N\geq 0}$ est bornée.*

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

3.3 Produit de Cauchy

Définition 42. *Etant donné deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on définit leur produit de Cauchy comme la série de terme général*

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Théorème 43. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy est absolument convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Application 44. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.

3.4 Séries entières

Définition 45. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe.*

Proposition 46. *(Lemme d'Abel)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 47. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence R de la série entière par :*

$$R := \sup\{r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Proposition 48. *D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < R$ et diverge pour tout $|z| > R$.*

Exemple 49. La série $\sum_n n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence $R = 1$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$.

Développement 2 :

Théorème 50. *(Théorème d'Abel angulaire)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$ et on fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose de plus

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{1 - \rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\}.$$

Alors on a $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Théorème 51. *(Théorème taubérien faible)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$.
Si de plus $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.