

Leçon 229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème de Glivenko-Cantelli
- Méthode de gradient à pas optimal

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Odoux-Ramis-Deschamps, Topologie et éléments d'analyse
3. Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe
4. Objectif Agrégation
5. Autre (pas de références précises)

Dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application.

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et propriétés. Régularité.

Définition 1. On dit que f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I si pour tout $(x, y) \in I^2$, on a $x < y \Rightarrow f(x) \leq y$ (respectivement $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).

On dit que f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si pour tout $(x, y) \in I^2$, on a $x < y \Rightarrow f(x) \geq y$ (respectivement $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$).

On dit que f est monotone (respectivement strictement monotone) sur I si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) sur I .

Proposition 2.

- La somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) est une fonction croissante
- Le produit d'une fonction croissante (respectivement décroissante) par un scalaire positif est une fonction croissante (respectivement décroissante).
- La composée de deux fonctions croissantes (respectivement de deux fonctions décroissantes) est croissante. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Théorème 3. (de la limite monotone)

Soit f une fonction monotone sur un intervalle de bornes a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $x_0 \in \text{Int}(I)$, alors la fonction f admet une limite à droite et à gauche en x_0 .

Corollaire 4. Soit f une fonction monotone sur un intervalle de bornes a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $x_0 \in \text{Int}(I)$, alors la fonction f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Théorème 5. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Théorème 6. On suppose que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone. Alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 7. (Théorème de la bijection)

On suppose que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J .

Théorème 8. Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow J$ un homéomorphisme. Alors f est strictement monotone.

Théorème 9. (des accroissements finis)

On se donne $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Corollaire 10. (Monotonie et dérivabilité)

On se donne $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Elle est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1.2 Suites de fonctions monotones

Proposition 11. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions monotones qui converge simplement vers f . Alors f est monotone.

Théorème 12. (Théorèmes de Dini)

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur I .
- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et croissantes qui converge simplement vers f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur I .

Exemple 13. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = 1 - x^n$ converge simplement vers la fonction $f: x \mapsto 1$ si $x \neq 1$ et $1 \mapsto 0$. Cette fonction n'est pas continue, et il n'y a alors pas convergence uniforme.

Développement 1 :**Théorème 14.** (Glivenko-Cantelli).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, F la fonction de répartition commune des X_i et $F_n(x)(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i(\omega) \leq x\}}$ la fonction de répartition empirique. Alors $\mathbb{P}$ -presque sûrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - F_n(x)| = 0.$$

1.3 Fonctions à variations bornées**Définition 15.**

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment. On note $\text{sub}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Pour $\sigma \in \text{sub}([a, b])$ avec $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, on note

$$\text{Var}_\sigma(f) := \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On suppose que $\sup_{\sigma \in \text{sub}([a, b])} \text{Var}_\sigma(f) < +\infty$. Alors on dit que f est à variations bornées sur $[a, b]$ et on note

$$V_a^b := \sup_{\sigma \in \text{sub}([a, b])} \text{Var}_\sigma(f).$$

Exemple 16. Une fonction monotone est à variations bornées. Une fonction lipschitzienne est à variations bornées.

Exemple 17. La fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue mais n'est pas à variations bornées sur $[0, 1]$.

Proposition 18. Si $a \leq x < y \leq z \leq b$, on a la relation de Chasles

$$V_x^y(f) + V_y^z(f) = V_x^z(f).$$

Proposition 19. Si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , alors g est à variations bornées et

$$V_a^b(g) = \int_a^b |g'(t)| dt.$$

Proposition 20. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est à variations bornées si et seulement si il existe $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes telles que $f = g - h$.

Théorème 21. (Admis, très difficile)

Une fonction à variations bornées sur $[a, b]$ est dérivable presque partout sur $[a, b]$. Cela est vrai en particulier pour une fonction croissante.

2 Fonctions convexes**2.1 Fonctions convexes d'une variable réelle**

Théorème 22. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
2. $\forall (x, y, z) \in I^3, (x < y < z) \implies \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \right)$.
3. $\forall a \in I \quad t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est croissante sur I .
4. L'ensemble $\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ et } f(x) \leq y\}$, appelé épigraphe de f , est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Définition 23. Une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propositions équivalentes du théorème 21 est dite convexe sur I .

Proposition 24. Si f est convexe sur I , pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de I et toute famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Définition 25. On dit qu'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est concave sur I si $-f$ est convexe sur I .

Théorème 26. (Régularité des fonctions convexes)

Soit f une fonction convexe sur I . Alors f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point $a \in \text{Int}(I)$, et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$; f est continue sur $\text{Int}(I)$, et d'autre part, si $(a, b) \in \text{Int}(I)^2$ et $a < b$, on a

$$f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b).$$

Enfin, f'_d et f'_g sont des fonctions croissantes sur I .

Exemple 27. La fonction f peut être convexe sur I sans être continue sur I .

Par exemple, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$.

Théorème 28. Soit f une fonction convexe sur I .

- Si f est dérivable sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .

- Si f est dérivable deux fois sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .

2.2 Fonctions convexes sur un convexe de $\mathbb{R}^n$

Définition 29. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur C si pour tout $(x, y) \in C^2$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

La fonction f est dite strictement convexe sur C si l'inégalité ci-dessus est stricte dès que $x \neq y$.

Théorème 30. Soit f différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et C un convexe de U . Alors

1. f est convexe sur C si et seulement si

$$\forall (x, y) \in C^2 \quad f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

2. f est strictement convexe sur C si et seulement si l'inégalité précédente est stricte dès que $x \neq y$.

Théorème 31. Soit f deux fois différentiable sur un ouvert connexe U . Alors

1. f est convexe sur U si et seulement si la hessienne H_f de f est positive sur U .
2. f est strictement convexe sur U si et seulement si la hessienne H_f de f est définie positive sur U .

Exemple 32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n$. Alors $f: x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si A est positive. Elle est strictement convexe si et seulement si $f \in \mathcal{S}_n^{++}$.

3 Applications de la monotonie et de la convexité

3.1 (In)égalités

On se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 33. (de convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables et positives sur X , qui converge μ -presque partout vers une fonction f . Alors f est mesurable, positive μ -presque partout et vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Théorème 34. (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives sur X . Alors on a

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Proposition 35. (Inégalités arithmético-géométriques)

- Soit $t \in]0, 1[$ et $a, b \in [0, +\infty]$. Alors

$$a^{1-t} b^t \leq (1-t)a + tb.$$

- Soit $t \in]0, 1[$. Alors, pour $a, b \in [0, +\infty]$ et $\lambda > 0$ on a

$$a^{1-t} b^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}.$$

- Soit $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour $a, b \in [0, +\infty]$ et $\lambda > 0$ on a

$$ab \leq \lambda^p a^p / p + \lambda^{-q} b^q / q.$$

Proposition 36. (Inégalités de Hölder)

- Soit $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $t \in]0, 1[$. Alors on a

$$\int_X f^{1-t} g^t d\mu \leq \left(\int_X f d\mu \right)^{1-t} \left(\int_X g d\mu \right)^t.$$

- Soit $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X g^q \right)^{1/q}.$$

- Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive telle que $\int_X f^p d\mu < +\infty$. Alors

$$\left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} = \sup_{g \geq 0} \frac{\int_X fg d\mu}{\left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}} \leq \sup_{g \geq 0, \int_X g^q d\mu \leq 1} \int_X fg d\mu.$$

Proposition 37. (Inégalité de Minkowski)

Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives sur X , alors

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Une application des résultats de cette partie est le théorème suivant.

Théorème 38. (*Riesz-Fischer*)

Pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

3.2 Optimisation et méthode du gradient

Proposition 39. Si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors tout minimum local est global.

Théorème 40. Soit C un convexe non vide de E et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement convexe. Alors il existe au plus un minimum de f sur C .

Corollaire 41. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Alors f admet un unique minimum sur E .

On introduit la méthode du gradient, dont l'objectif est de trouver une solution à $Ax = b$ via la recherche d'un minimum local de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme 42. (*Inégalité de Kantorovitch*)

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note λ_1 et λ_n la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A . Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle &\leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|^4 \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{c(A)} + \sqrt{\frac{1}{c(A)}} \right)^2 \|x\|^4, \end{aligned}$$

où $c(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ désigne le contenu de A .

Développement 2 :

Théorème 43. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à minimiser $f: x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ quand x parcourt $\mathbb{R}^n$.

Il existe une unique solution $\bar{x}$ à ce problème, et elle est caractérisée par $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

De plus, la suite définie par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$ converge vers $\bar{x}$, où $t_k = -\nabla f(x_k)$ est l'unique réel minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + t d_k)$.