

Leçon 228. Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions d'une variable réelle.

Devs :

- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Morphismes de $\mathcal{S}^1$ dans GL_n

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Zuily-Quéffelec, Analyse pour l'agrégation
3. Rudin, Analyse réelle et complexe
4. Autre (pas de référence)

Dans tout ce qui suit, on se donne I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application numérique. On se donne aussi deux réels a et b dans I avec $a \leq b$.

1 Généralités

1.1 Fonctions continues, fonctions α -höldériennes

Définition 1. On dit que f est continue en un point $a \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Proposition 2. (caractérisation séquentielle)

Soit $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(a)$.

Théorème 3. (des valeurs intermédiaires)

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 4. On suppose que f est continue sur le compact $[a, b]$. Alors f atteint ses bornes sur $[a, b]$ (autrement dit, $f([a, b])$ est compact).

Définition 5. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2 \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 6. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $I = [0, +\infty[$.
La fonction $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 7. (Heine)

Si I est compact et que f est continue sur I , alors f est uniformément continue sur I .

Exemple 8. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 9. On dit que f est α -höldérienne sur I s'il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $K > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in I$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$.
Si $\alpha = 1$, on dit que f est K -lipschitzienne sur I .

Proposition 10. Une fonction α -höldérienne sur I est uniformément continue sur I .

Exemple 11. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $1/2$ -höldérienne.

La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\log|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue mais n'est pas α -höldérienne pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

1.2 Fonctions dérivables

Définition 12. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est réelle. On note $f'(a)$ la valeur de cette limite.

On dit que f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$) existe et est réelle. On note $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$) la valeur de cette limite.

Sur l'ensemble D des points où f est dérivable, on définit la fonction $a \mapsto f'(a)$, appelée application dérivée de f et notée f' .

Proposition 13. Si $a \in \text{Int}(I)$, alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a , et que de plus $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 14. (Existence d'un développement limité à l'ordre 1)

La fonction f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(a) + \ell(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a).$$

Dans ce cas, on a $\ell = f'(a)$.

Proposition 15. Une fonction dérivable en $a \in I$ est continue en $a \in I$.

Remarque 16. La fonction dérivée f' n'est pas nécessairement continue. Par exemple, la fonction définie par $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais sa dérivée n'est pas continue en zéro.

Proposition 17. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, dérivables en $a \in I$. Alors

1. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
2. Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.
3. Si $g(a) \neq 0$, le quotient f/g est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$.

Proposition 18. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f est dérivable en $a \in I$ et que g est dérivable en $f(a) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et vérifie

$$\forall x \in I \quad (f \circ g)'(a) = (f' \circ g)(a) \times g'(a).$$

Proposition 19. Soit f une bijection de I dans J , dérivable en $a \in I$. L'application f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas, on a

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Définition 20. Par récurrence, on peut définir la dérivée $n^{\text{ème}}$ (lorsqu'elle existe) par $f'' = (f')'$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables n fois sur I et dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue sur I .

Proposition 21. (Formule de Leibnitz)

Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications n fois dérivables en $a \in I$. Alors le produit fg est n fois dérivable en a et vérifie

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

1.3 Théorèmes principaux

Proposition 22. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f admet un extremum relatif en $c \in \text{Int}(I)$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.

Théorème 23. (de Rolle)

Soit $f \in [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 24. (des accroissements finis)

Soit $f \in [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Corollaire 25. Une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Elle est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Théorème 26. (Egalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[\quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Théorème 27. (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors

$$F(a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Théorème 28. (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors

$$F(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^{n+1}).$$

1.4 Intégration et dérivabilité

Théorème 29. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Corollaire 30. Toute application $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F , et pour toute primitive F de f , on a $\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 31. (Relèvement $\mathcal{C}^1$)

Soit $\varphi: (S^1, \times) \rightarrow (\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupe continu. L'application $\psi: t \mapsto \varphi(e^{it})$ est dérivable, et vérifie l'équation différentielle $\psi'(x+t) = \psi(x)\psi'(t)$.

Développement 1 :

Corollaire 32. Soit $\varphi: (S^1, \times) \rightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{tk_1} & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Où les matrices R_{tk_i} sont des matrices de rotation : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

2 Continuité et dérivabilité de certaines fonctions

2.1 Fonctions monotones

Théorème 33. (de convergence monotone)

Soit f une fonction monotone sur un intervalle de bornes a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$, alors la fonction f admet une limite à droite et à gauche en x_0 .

Corollaire 34. Soit f une fonction monotone sur un intervalle de bornes a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$, alors la fonction f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Théorème 35. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

2.2 Fonctions absolument continues

Définition 36. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et pour toute famille disjointe d'intervalles $[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n]$ dans I vérifiant

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \leq \delta,$$

on ait

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 37. Une fonction absolument continue est en particulier uniformément continue, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 38. Une fonction lipschitzienne est absolument continue.

Proposition 39. Soit $f \in L^1([a, b])$. Alors la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est absolument continue sur $[a, b]$.

Théorème 40. (Théorème fondamental du calcul intégral, **Admis**).

Soit f une fonction absolument continue sur $[a, b]$. Alors f est dérivable presque partout sur $[a, b]$, $f' \in L^1([a, b])$ et on a

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

2.3 Suites de fonctions

Théorème 41. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0 .

Théorème 42. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur I . On suppose que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g et qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f de classe C^1 vérifiant $f' = g$.

Théorème 43. (Weierstrass)

Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonction polynomiales.

2.4 Intégrales à paramètre

Théorème 44. (Continuité sous l'intégrale)

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: \begin{cases} I \times J \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto f(t, x) \end{cases}$ une fonction vérifiant

- Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable sur I .
- Pour presque tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur J .
- Il existe $g \in L^1(I)$ telle que $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in J$ et pour presque tout $t \in I$.

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est continue sur I .

Théorème 45. (*Dérivation sous l'intégrale*)

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: \begin{cases} I \times J \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto f(x, t) \end{cases}$ une fonction vérifiant

- Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur I .
- Pour presque tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur J .
- Il existe $g \in L^1(I)$ telle que $\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| \leq g(t)$ pour tout $x \in J$ et pour presque tout $t \in I$.

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est dérivable sur I et on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

3 Dérivation faible et distributions

(Reprendre la version du plan de la 209 ici).

Développement 2 :

Théorème 46. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est lipschitzienne si et seulement si il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) - f(y) = \int_x^y g(t) dt.$$