P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

Devs :

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global (avec Banach-Picard)
- Méthode de gradient à pas optimal

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
3. Garet, Probabilités et processsus stochastiques
4. Hiriat-Urruty, Optimisation et analyse convexe

Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites récurrentes. Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire*

$$\forall n \geq h \quad x_n = f(u_{n-1}, \ldots, u_{n-h}), \qquad (\star)$$

où $f: \mathbb{K}^h \to \mathbb{K}$ est une application.

Proposition 2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre h vérifiant $(\star)$. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$, alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell, \ldots, \ell)$.*

Proposition 3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre h vérifiant $(\star)$. On peut se ramener à l'étude d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre 1, avec*

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+h-1} \end{pmatrix}, \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ f(x_{n-h-1}, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = F(X_n).$$

Cependant, il faut alors étudier une application sur $\mathbb{K}^n$, ce qui est parfois plus difficile.

1.2 Suites récurrentes réelles d'ordre 1

Proposition 4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in I$.*

- *Si f est croissante, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variations est donné par le signe de $x_1 - x_0$.*
- *Si f est décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, et leur sens de variation est opposé.*

Exemple 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.

Les points fixes de f sont 1 et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. On obtient les cas suivants selon la valeur de u_0 :

- Si $u_0 \in [0, 1[$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\nearrow} 0$.
- Si $u_0 = 1$, alors $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $u_0 \in]1, (3+\sqrt{5})/2[$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\searrow} 0$.
- Si $u_0 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors $u_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $u_0 \in](3+\sqrt{5})/2, +\infty[$, alors u_n n'est pas défini à partir d'un certain rang.

Exemple 6. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x_{n+1} = \sin(x_n)$ converge vers zéro, et on a l'équivalent $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Définition 7. *On appelle suite arithmétique de raison a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant $x_{n+1} = x_n + a$ avec $a \in \mathbb{K}$.*

On appelle suite géométrique de raison q une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant $x_{n+1} = q x_n$ avec $q \in \mathbb{K}$.

On appelle suite arithmético-géométrique une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant $x_{n+1} = q x_n + a$ avec $(a, q) \in \mathbb{K}^2$.

Théorème 8. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a, alors $x_n = x_0 + n a$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors $x_n = x_0 q^n$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique avec $a \neq 1$, alors $x_n = a^n\left(x_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$.

Définition 9. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est homographique si on a*

$$x_{n+1} = \frac{a x_n + b}{c x_n + d}, \qquad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tels que } ad - bc \neq 0.$$

Une telle suite n'est définie que si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de la fonction $h: x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Théorème 10. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de complexes homographique. On considère l'équation :*

$$h(x) = x \Longleftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0. \qquad (E)$$

Si (E) *admet deux racines distinctes* α *et* β *alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où} \quad k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$

Si (E) *admet une racine double* α*, alors on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \quad \text{où} \quad k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

1.3 Suites récurrentes linéaires

Définition 11. *On dit qu'une suite récurrente linéaire* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *vérifie une récurrence linéaire (homogène) d'ordre* h *à coefficients constants si*

$$\forall n \geq h \quad u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_h u_{n-h}, \quad \text{avec} \quad (a_1, \ldots, a_h) \in \mathbb{C}^h. \qquad (*)$$

Proposition 12. *L'équation* $(E): X^h - a_1 X^{h-1} - \cdots - a_h = 0$ *s'appelle l'équation caractéristique de la récurrence* $(*)$*. Notons* $r_1, \ldots, r_q$ *ses racines et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *leur multiplicité.*

Alors l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $(*)$ *est l'ensemble des suites de la forme*

$$x_n = P_1(n)\, r_1^n + \cdots + P_q(n)\, r_q^n,$$

où pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $P_i \in \mathbb{C}[X]$ *vérifie* $\deg P_i < \alpha_i$.

Remarque 13. En pratique, on détermine les coefficients des polynômes P_i à partir des h premiers termes $u_0, \ldots, u_{h-1}$ de la suite.

Théorème 14. *(Suites récurrentes linéaires d'ordre deux à coefficients constants)*

Le résultat qui suit est un cas particulier de la proposition 12, rencontré plus souvent en pratique et au programme des classes préparatoires scientifiques.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = a x_{n-1} + b x_{n-2}$.

On considère l'équation caractéristique correspondante (E): $x^2 - ax - b = 0$.

- *Si* (E) *possède deux racines distinctes* x_1 *et* x_2*, alors* x_n *est de la forme*

$$x_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

- *Si* (E) *possède une racine double* x*, alors* x_n *est de la forme*

$$x_n = (\lambda n + \mu)\, x^n.$$

Remarque 15. Lorsque a et b sont réels et que le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ de (E) est strictement négatif, les racines λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes (non nuls) conjugués.

Dans ce cas, on peut donner une expression réelle de x_n, en écrivant $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$. On obtient alors $x_n = \rho^n (\gamma \cos(\theta n) + \delta \sin(\theta n))$, avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

2 Point fixe et méthodes itératives

2.1 Théorème du point fixe de Picard et applications

Définition 16. *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit qu'une application* $f: X \to X$ *est contractante s'il existe* $k \in [0, 1[$ *tel que* $\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) < k \cdot d(x, y)$.

Théorème 17. *(Point fixe de Banach-Picard)*

Soit (X, d) *un espace métrique complet, et* $f: X \to X$ *une application contractante. Alors* f *admet un unique poit fixe* $x \in X$*. De plus, toute suite récurrente* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in X$ *et* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* x.

Corollaire 18. *(Théorème du point fixe généralisé)*

Soit (X, d) *un espace métrique complet, et* $f: X \to X$ *une application. On suppose qu'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ *soit contractante. Alors* f *admet un unique point fixe.*

Exemple 19. $X =]0, 1[$ et $F(x) = x/2$. L'application F est contractante de X dans lui même, mais sans point fixe (X n'est pas complet).

Exemple 20. $X = [0, 1]$ et $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. L'application F est contractante, X est complet, mais F est sans point fixe (on a $F(X) = [1, \sqrt{2}]$ et pas $F(X) = X$).

Exemple 21. X est un espace complet quelconque, et $F(x) = x$: tout point de X est un point fixe (f n'est pas contractante).

On donne deux applications très importantes du théorème de Banach-Picard.

Développement 1 :

Théorème 22. *(Cauchy-Lipschitz, version globale)*

Soit I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^m$ *et* $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *une application continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors le problème de Cauchy*

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution, définie sur I *tout entier.*

Théorème 23. *(Théorème d'inversion locale)*

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible, i.e $\det(Df(a)) \neq 0$. Il existe alors un ouvert V contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tel que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.

On a ainsi l'équivalence $(x \in V$ et $y = f(x)) \iff (y \in W$ et $x = f^{-1}(y))$.

2.2 Classification des points fixes et méthode de Newton

Théorème 24. *(Classification des points fixes d'une fonction numérique)*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $a \in I$ un point fixe de F.

- *Si $|F'(a)| < 1$, il existe un intervalle fermé J de centre a, stable par F, et la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_0 \in J$ converge vers a. Si de plus F' ne s'annule pas sur J et $x_0 \neq a$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et on a l'équivalent en $+\infty$:*

$$x_{n+1} - a \sim F'(a)(x_n - a)$$

  *On dit que a est un point fixe **attractif**.*

- *Si $|F'(a)| = 0$, que $F \in \mathcal{C}^2(I)$ et que F'' ne s'annule pas sur J, alors pour $x_0 \in J \setminus \{a\}$, on a $x_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a l'équivalent en $+\infty$:*

$$x_{n+1} - a \sim \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2$$

  *On dit que a est un point fixe **superattractif**.*

- *Si $|F'(a)| > 1$, il existe un intervalle fermé J de centre a tel que, pour $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorte de J.*

  *On dit que a est un point fixe **répulsif**.*

Remarque 25. Le cas où $|F'(a)| = 1$ est délicat, et on a pas de règle précise. Par exemple, en prenant $F(x) = 1 - x$, on a $x_{2n} = x_0$ et $x_{2n+1} = 1 - x_0$, donc le point fixe 1 n'est ni attractif ni répulsif.

Théorème 26. *(Méthode de Newton)*

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 \in [c,d]$ et pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{avec} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors F a un unique zéro a, et pour $x \in [c,d]$, il existe z entre a et x tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z)}{f'(x)}(x - a)^2.$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C\,|x - a|^2$ pour tout $x \in [c,d]$, et $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F. Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une convergence quadratique vers a pour peu que le point de départ x_0 soit assez proche de a.

Exemple 27. On fixe $y > 0$ et on prend $f(x) = x^2 - y$. On approche ainsi $\sqrt{y}$ par la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = F(x_n)$, avec $F(x) = x - \frac{x^2 - y}{2x}$.

2.3 Méthode du gradient

L'objectif est de trouver une solution à $Ax = b$ via la recherche d'un minimum local de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme 28. *(Inégalité de Kantorovitch)*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note λ_1 et λ_n la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle &\leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{c(A)} + \sqrt{\frac{1}{c(A)}}\right)^2 \|x\|^4, \end{aligned}$$

où $c(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ désigne le contenu de A.

Développement 2 :

Théorème 29. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à minimiser $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ quand x parcourt $\mathbb{R}^n$.*

Il existe une unique solution $\bar{x}$ à ce problème, et elle est caractérisée par $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

De plus, la suite définie par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$ converge vers $\bar{x}$, où $t_k = -\nabla f(x_k)$ est l'unique réel minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + t d_k)$.

3 Suites récurrentes de variables aléatoires

On se donne E un ensemble fini ou dénombrable, muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$. On dit que E est un espace d'états.

3.1 Chaînes de Markov : définitions et propriétés

Définition 30. *Soit E un espace d'état. On appelle noyau de transition sur E une fonction*

$$P : \begin{cases} E \times E & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & p(x,y) \end{cases},$$

tel que pour tout $x\in E$ on ait

$$\sum_{y\in E} p(x,y)=1.$$

Définition 31. *On appelle chaîne de Markov sur l'espace d'état E de noyau de transition P un quituplet $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathbb{P}_x)_{x\in E},X=(X_n)_{n\geq 0})$, tel que*

- *La suite X est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*
- $\forall x\in E,\quad X_0=x$ *$\mathbb{P}_x$-presque sûrement.*
- $\forall n\geq 0\quad \forall y\in E\quad \forall x\in E\quad \mathbb{P}_x(X_{n+1}=y|\mathcal{F}_n)=p(X_n,y)$.

Exemple 32. (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$)

On prend $E=\mathbb{Z}^d$, $d\geq 1$. On se donne μ une probabilité sur $\mathbb{Z}^d$ et une suite $(\xi_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires *i.i.d* sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{F})$, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et de loi μ.

X_0 est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et pour tout $n\geq 1$, $X_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$.

Alors $(\Omega,\mathcal{F},(\sigma(X_n))_{n\in\mathbb{N}},(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{Z}^d},X=(X_n)_{n\geq 0})$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau de transition $p(x,y)=\mu(y-x)$, avec $\mathbb{P}_x=\delta_0$ pour tout $x\in\mathbb{Z}^d$.

Proposition 33. *On note $\mathcal{C}_n=\sigma(\widehat{X}_1,\ldots,\widehat{X}_n)$, où $\widehat{X}_i\colon \begin{cases} E^{\mathbb{N}} & \to & E \\ (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \omega_n\end{cases}$.*

Alors $\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{C}_n$ est un π-système, et une fonction $F\colon(\Omega,\mathcal{F})\to(E^{\mathbb{N}},\mathcal{C})$ est mesurable si et seulement si

$$\forall n\geq 0\quad \widehat{X}_n\circ F \text{ est mesurable.}$$

Définition 34. *On définit l'opérateur de décalage θ sur E^N par $\theta((\omega_n)_{n\in\mathbb{N}})=(\omega_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\theta_0=\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{N}}}$ et $\theta_n=\theta\circ\cdots\circ\theta=\theta^n$.*

Définition 35.

- *Soit $x\in E$ et $X\colon(\Omega,\mathcal{F})\to(E,\mathcal{P}(E))$ une variable aléatoire. On note $\mathbb{E}_x[X]:=\int_\Omega X\,d\mathbb{P}_x$ l'espérance sous la mesure $\mathbb{P}_x$.*
- *Si $Z\colon(\Omega,\mathcal{F})\to(E,\mathcal{P}(E))$ est une variable aléatoire et Y une variable aléatoire positive sur $(\Omega,\mathcal{F})$, on note $\mathbb{E}_Z[Y]:=\sum_{x\in E}\mathbb{E}_x[Y]\,\mathbf{1}_{\{Z=x\}}$.*

Théorème 36. *(Propriété de Markov faible)*

Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathbb{P}_x)_{x\in E},X=(X_n)_{n\geq 0})$ une chaîne de Markov d'espace d'état E et de noyau de transition P. Soit $F\colon(\Omega,\mathcal{F})\to(E^{\mathbb{N}},\mathcal{C})$.

Alors

$$\forall n\geq 0\quad \forall x\in E\quad \mathbb{E}_x[F(\theta_n(X))\mid\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}_{X_n}[F(X)]\quad \mathbb{P}_x\text{-presque sûrement.}$$

Théorème 37. *(Propriété de Markov forte)*

Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathbb{P}_x)_{x\in E},X=(X_n)_{n\geq 0})$ une chaîne de Markov d'espace d'état E et de noyau de transition P. Soit $F\colon(\Omega,\mathcal{F})\to(E^{\mathbb{N}},\mathcal{C})$. Soit T un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors

$\forall n\geq 0\quad \forall x\in E\quad \mathbb{E}_x[F(\theta_T(X))\,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mid\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}_{X_n}[F(X)]\cdot\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ *$\mathbb{P}_x$-presque sûrement.*

3.2 Classification des états

Dans ce qui suit, on se donne un espace d'état E, un noyau de transition P et une chaîne de Markov $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathbb{P}_x)_{x\in E},X=(X_n)_{n\geq 0})$. On se donne un élément $x\in E$.

Définition 38. *On définit le nombre N_x de visites en x et le premier temps T_x de retour en x par*

$$N_x:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\quad \text{et}\quad T_x:=\inf\{N\geq 1:\ X_N=x\}.$$

Proposition 39. *Une et une seule des deux situations suivantes a lieu :*

- *$\mathbb{P}_x(T_x<\infty)=1$. Dans ce cas, $N_x=+\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. On dit que l'état x est récurrent.*
- *$\mathbb{P}_x(T_x<\infty)<1$. Dans ce cas, $N_x<\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s, et de plus, $\mathbb{E}_x[N_x]=\dfrac{1}{\mathbb{P}_x(T_x=+\infty)}$. On dit que l'état x est transient.*

Exemple 40.

Dans la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, l'état zéro est récurrent.

Définition 41. *Soit $x,y\in E$. On dit que x mène à y et on note $x\to y$ si $\mathbb{E}_x[N_x]>0$.*

La relation $\to$ est réflexive et transitive.

Proposition 42. *Soit $x,y\in E$. On suppose que $x\to y$ et que x est récurrent. Alors y est récurrent, et $y\to x$.*

Définition 43. *On dit que la chaîne de Markov, ou le noyau de transition P est irréductible si*

$$\forall x,y\in E\quad x\to y.$$

Théorème 44. *(Classification des états d'une chaîne irréductible)*

Supposons la chaîne irréductible. Alors une et une seule des deux situations suivantes a lieu :

- *Tous les états sont récurrents, et $\forall x\in E\quad \mathbb{P}_x(\forall y\in E,N_y=+\infty)=1$.*
- *Tous les états sont transients, et $\forall x\in E\quad \mathbb{P}_x(\forall y\in E,N_y<\infty)=1$.*

Si E est fini, alors on est toujours dans la première situation.

Exemple 45. (Récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$)

La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrente. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d\geq 3$ est transiente.