P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 223. Suites numériques. Convergence, valeur d'adhérence. Exemples et applications.

Devs :

- Critère d'équirépartition de Weyl
- Convergence presque sûre des sous-martingales à partie positive bornées dans L^1

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
3. Garet, Probabilités et processus stochastiques
4. Brianes & Pages, Théorie de l'intégration

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Limite d'une suite

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. *On appelle suite numérique une application $u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{K}$. Le terme $u(n)$ est appelé le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite et on le note u_n. La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ s'il existe $\ell\in E$ tel que*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall n\geq N\quad|u_n-\ell|\leq\varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Application 3. Soit $f\colon\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ une fonction numérique. Alors f est continue en un point $a\in\mathbb{K}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Définition 4. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad|u_n|\leq M.$$

Proposition 5. *Toute suite convergente est bornée.*

Définition 6. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall p,q\geq N\quad|u_p-u_q|\leq\varepsilon.$$

Théorème 7. *Une suite numérique (à valeurs réelles ou complexe) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Définition 8. *Une suite réelle est dite majorée (respectivement minorée) s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $u_n\leq M$ (respectivement $u_n\geq M$) pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Proposition 9. *Une suite réelle croissante et majorée converge. Une suite réelle décroissante et minorée converge.*

Théorème 10. *(d'existence d'une limite par encadrement)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n\leq u_n\leq w_n.$$

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Corollaire 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell\in\mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $(|u_n-\ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.*

Remarque 12. En partique, si on connait à l'avance la valeur de ℓ, il est souvent plus facile de majorer la quantité $|u_n-\ell|$ pour montrer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ en utilisant le corollaire 10.

Définition 13. *On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si*

$$\lim_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$$

Proposition 14. *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Définition 15. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge au sens de Césaro vers $\ell\in\mathbb{K}$ si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.*

Proposition 16. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ.*

Remarque 17. La réciproque est fausse : par exemple, on peut prendre $u_n=(-1)^n$.

1.2 Valeur d'adhérence

Définition 18. *On appelle sous-suite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Proposition 19. *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et possède la même limite.*

Définition 20. *On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément $a\in\mathbb{K}$ tel que*

$$\forall\varepsilon>0\quad\forall p\in\mathbb{N}\quad\exists n\geq p\quad|x_n-a|\leq\varepsilon.$$

Proposition 21. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, et $a\in\mathbb{K}$. Il y a équivalence entre :*

- *Le scalaire a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *Il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*
- *Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a\in\overline{A_p}$, où $A_p:=\{x_n,\ n\geq p\}$.*
- *L'ensemble $\{n\in\mathbb{N}:\ x_n=a\}$ est infini.*

Remarque 22. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égal à $\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}$: c'est un fermé de $\mathbb{K}$.

Proposition 23. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$, alors ℓ est la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Théorème 24. *(Théorème de Bolzano Weierstrass)*
Toute suite réelle ou complexe admet une valeur d'adhérence. Autrement dit, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces compacts.

1.3 Limite inférieur et supérieure

On note $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Définition 25. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la limite supérieure de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :*

$$\limsup_n x_n := \inf_{n\geq 0}\sup_{k\geq n} x_k.$$

On définit la limite inférieure de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\liminf_n x_n := \sup_{n\geq 0}\inf_{k\geq n} x_k.$$

Remarque 26. Comme toute suite monotone converge dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a immédiatement :

$$\limsup_n x_n = \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} x_k \quad\text{et}\quad \liminf_n x_k = \lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n} x_k.$$

Proposition 27. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ une fonction monotone et continue. Alors :*

$$f\Big(\limsup_n x_n\Big)=\limsup_n f(x_n)\ \text{ et }\ f\Big(\liminf_n x_n\Big)=\liminf_n f(x_n)\quad \text{si } f \text{ est croissante,}$$

$$f\Big(\limsup_n x_n\Big)=\liminf_n f(x_n)\ \text{ et }\ f\Big(\liminf_n x_n\Big)=\limsup_n f(x_n)\quad \text{si } f \text{ est décroissante.}$$

Théorème 28. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ sont respectivement les plus grandes et plus petites valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si on a $\limsup_n x_n=\liminf_n x_n$.*

Proposition 29. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\overline{\mathbb{R}}$, simultanément majorées dans $[-\infty,+\infty[$ ou bien minorées dans $]-\infty,+\infty]$. Alors*

$$\limsup_n\,(x_n+y_n)\ \leq\ \limsup_n x_n+\limsup_n y_n,$$

$$\liminf_n\,(x_n+y_n)\ \geq\ \liminf_n x_n+\liminf_n y_n.$$

2 Quelques exemples de suites numériques

2.1 Suites récurrentes

Définition 30. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire*

$$\forall n\geq h\quad x_n=f(u_{n-1},\ldots,u_{n-h}),\qquad (\star)$$

où $f:\mathbb{K}^h\to\mathbb{K}$ est une application.

Proposition 31. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre h vérifiant $(\star)$. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell\in\mathbb{K}$, alors ℓ vérifie $\ell=f(\ell,\ldots,\ell)$.*

Proposition 32. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ telle que $f(I)\subset I$. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1}=f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x_0\in I$.*

- *Si f est croissante, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variations est donné par le signe de x_1-x_0.*
- *Si f est décroissante, la fonction $f\circ f$ est croissante. On en déduit que les sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, et leur sens de variation est opposé.*

Théorème 33. *(Suites récurrentes linéaires d'ordre deux à coefficients constants)*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n=a x_{n-1}+b x_{n-2}$.
On considère l'équation caractéristique correspondante (E): $x^2-ax-b=0$.

- *Si (E) possède deux racines distinctes x_1 et x_2, alors x_n est de la forme*

$$x_n=\lambda x_1^n+\mu x_2^n,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{K}.$$

- *Si (E) possède une racine double x, alors x_n est de la forme*
$$x_n = (\lambda n + \mu)\, x^n.$$

2.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 34. *On appelle suite arithmétique de raison a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant $x_{n+1} = x_n + a$ avec $a \in \mathbb{K}$.*

On appelle suite géométrique de raison q une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant $x_{n+1} = q\, x_n$ avec $q \in \mathbb{K}$.

On appelle suite arithmético-géométrique une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant $x_{n+1} = q x_n + a$ avec $(a, q) \in \mathbb{K}^2$.

Théorème 35. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a, alors $x_n = x_0 + n a$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors $x_n = x_0\, q^n$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique avec $a \neq 1$, alors $x_n = a^n\left(x_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$.

2.3 Suites homographiques

On peut généraliser le concept de suite arithmético-géométrique, de la manière suivante.

Définition 36. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est homographique si on a*
$$x_{n+1} = \frac{a x_n + b}{c x_n + d}, \qquad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tels que } a d - b c \neq 0.$$
Une telle suite n'est définie que si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de la fonction $h\colon x \mapsto \dfrac{a x + b}{c x + d}$.

Théorème 37. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes homographique. On considère l'équation :*
$$h(x) = x \Longleftrightarrow c x^2 - (a - d) x - b = 0. \qquad (E)$$
Si (E) admet deux racines distinctes α et β alors
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où} \quad k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$
Si (E) admet une racine double α, alors on a
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + k n \quad \text{où} \quad k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

2.4 Suites équiréparties

Dans ce qui suit, on note $\mathcal{E}([0,1[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0,1[$ à valeurs réelles. On rappelle que $\mathcal{E}([0,1[, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1[, \mathbb{R})$.

Définition 38. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1[$ est équirépartie si pour tout intervalle ouvert $]a,b[\subset [0,1[$, on a*
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\operatorname{Card}\{1 \leq n \leq N \,:\, x_n \in]a,b[\}}{N} = b - a.$$
Cela signifie que pour N assez grand, la proportion d'éléments x_n dans $]a,b[$ pour $1 \leq n \leq N$, s'approche du quotient de la longueur de l'intervalle $]a,b[$ par la longueur de l'intervalle $[0,1[$.

Proposition 39.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1[^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $(a,b) \in [0,1[^2$ tels que $a < b$, on a
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b[}(x_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b[}(x)\, dx.$$

Développement 1 :

Théorème 40. *(Critère de Weyl)*

On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1[$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k x_n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 41. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels est équirépartie modulo 1 lorsque la suite $(x_n - \lfloor x_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

Le théorème de Weyl permet alors de montrer très facilement que pour $\gamma > 0$, la suite $(n\gamma)_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement si γ est irrationnel.

3 Une application à un théorème convergence en probabilités

On commence par quelques définitions et rappels sur les martingales à temps discret. Dans ce qui suit, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Ω, c'est-à-dire une suite croissante de parties de Ω et dont l'union sur $\mathbb{N}$ vaut Ω.

Définition 42. *On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une sous-martingale si*

1. $\forall n\in\mathbb{N} \quad X_n\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. $\forall n\in\mathbb{N} \quad X_n$ *est $\mathcal{F}_n$-mesurable (on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée à la filtration).*
3. $\forall n\in\mathbb{N} \quad \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\geq X_n$ *p.s.*

Définition 43. *On dit qu'une variable aléatoire T sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si*

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\} \quad \{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n,$$

où on définit $\mathcal{F}_\infty=\sigma(\mathcal{F}_n : n\in\mathbb{N})$ comme la tribu engendrée par les éléments de l'ensemble des tribus $\mathcal{F}_n$.

Si T est un temps d'arrêt, on définit la tribu des évènements antérieurs à T par

$$\mathcal{F}_T := \{A\in\mathcal{F}_\infty : \forall n\in\mathbb{N} \quad A\cap\{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n\}.$$

Théorème 44. *Si T est un temps d'arrêt et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale, alors la suite $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une sous-martingale.*

Théorème 45. *(Théorème d'arrêt)*

Soit $S\leq T$ deux temps d'arrêt bornés. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale. Alors $X_T\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] \;\geq\; X_S$$

En particulier, il vient $\mathbb{E}[X_T]\geq\mathbb{E}[X_S]$.

Définition 46. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

On se donne $a<b\in\mathbb{R}$ et on définit $\tau_1=\inf\{k\geq 1 : u_k\leq a\}$, avec la convention $\inf(\varnothing)=+\infty$. On définit alors par récurrence

$$\tau_{2n} := \inf\{k>\tau_{2n-1} : u_k\geq b\} \quad \text{et} \quad \tau_{2n+1} := \inf\{k>\tau_{2n} : u_k\leq a\}.$$

On peut alors définir le nombre de traversées montantes de l'intervalle $[a,b]$ par

$$U_\infty(a,b) \;:=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_{2k}<+\infty\}},$$

ainsi que le nombre de traversées avant l'instant n par

$$U_n(a,b) \;:=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_{2k}\leq n\}}.$$

Lemme 47. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ tels que $a<b$, on a $U_\infty(a,b)<+\infty$.*

Développement 2 :

Théorème 48. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^+) < +\infty.$$

Alors il existe une variable aléatoire X_∞ intégrable telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

4 Annexe

Illustration de la définition 46.
Sur le dessin suivant, on a $U_{11}(a,b)=1$.