

Leçon 222. Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Devs :

- Equation de Schrödinger sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
- Problème de Dirichlet sur $\mathbb{R}^d$

Références :

1. David, Equations aux dérivées partielles
2. Di Menza, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles
3. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
4. Zuily-Quéffelec, Analyse pour l'agrégation
5. Polycopié d'analyse fonctionnelle M1 Paris 6 (pas de bibliographie)

Précisons que je n'ai jamais suivi un seul cours de ma vie sur les EDP. Je m'excuse par avance s'il y a des erreurs, en particulier sur la partie 1, que je découvre en l'écrivant...

1 Equations de transport et de propagation

1.1 Equations aux dérivées partielles : définitions et exemples

Définition 1. On appelle *équation aux dérivées partielles* une *équation fonctionnelle* qui met en relation une fonction sur $\mathbb{R}^n$ et ses dérivées partielles.

Si $u \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une *équation aux dérivées partielles* est une relation de la forme

$$\mathcal{F}\left(u, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f, \quad (1)$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et f une fonction donnée.

Définition 2. L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u .

Définition 3. Si la fonction f est nulle, on dit que l'équation (1) est homogène.

Définition 4. On dit que l'équation (1) est linéaire si $\mathcal{F}$ est linéaire par rapport à toutes ses variables.

Remarque 5. En général, une équation aux dérivées partielles est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type $\mathcal{G}\left(u, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma \subset \partial\Omega$.

Exemple 6. Les équations aux dérivées partielles suivantes sont d'ordre 1 et 2 :

- $u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + e^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$
- $\cos(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2.$

La première est homogène et linéaire.

1.2 Equation de transport

Définition 7. L'équation de transport est représentée par le problème de Cauchy suivant :

$$(T) : \begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + c(x) \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \mu(x, 0) = \mu_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

où c et μ_0 sont des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, supposées connues.

Proposition 8. (Méthode des caractéristiques).

L'idée consiste à chercher des courbes $\xi(t)$ le long desquelles une solution a un comportement connu. Si u est solution de (T) et $\xi(t)$ est solution de $\begin{cases} \xi'(t) = c(\xi(t)) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$, alors

$$\frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi(t)) + c(\xi(t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi(t)) = 0.$$

On en déduit $u(\xi(t), t) = u(\xi(0), 0) = u_0(\xi_0)$.

Exemple 9. L'équation de transport à vitesse constante c a pour solution $u(x, t) = u_0(x - ct)$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Exemple 10. Si $c = c(x, t)$ dépend du temps, on peut encore appliquer la méthode des caractéristiques. Par exemple, pour $c(x, t) = \frac{x}{t^2 + 1}$, on se place sur la caractéristique $\xi(t) = \xi(0) \arctan(t)$.

Remarque 11. Cette méthode fonctionne dès que $c(x, t)$ est linéaire en x .

1.3 Equation des ondes

Définition 12. L'équation des ondes en dimension 1 correspond au problème de Cauchy

$$(O): \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 13. L'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se factorise en deux termes de transport $\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Théorème 14. (Formule de d'Alembert).

La fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t)) + \int_{x-t}^{x+t} h(\tau) d\tau$$

est solution de l'équation des ondes en dimension 1.

Remarque 15. La fonction u s'écrit $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$ pour F et G deux fonctions convenables.

2 Utilisation de l'analyse de Fourier

2.1 Séries de Fourier et équation de la chaleur

Définition 16. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt.$$

On appelle série de Fourier associée (formellement) à f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$, et on note $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à cette dernière.

Théorème 17. (Egalité de Parseval).

Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$.

Théorème 18. (Théorème de Dirichlet)

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On suppose que f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{T}$. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{T}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Définition 19. On se donne $L > 0$, $c > 0$ et on note $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$, $\bar{Q} = [0, L] \times [0, +\infty[$.

On appelle solution de l'équation de la chaleur sur Q une fonction $u \in C^0(\bar{Q})$ telle que $u \in C^2(Q)$ vérifiant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur } Q, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{pour } t \in [0, +\infty[\quad \text{et } u(x, 0) = h(x) \quad \text{pour } x \in [0, L],$$

où $h \in C^1([0, L])$ vérifie $h(0) = h(L)$.

Théorème 20. La fonction u définie sur Q par $u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(n) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$ est solution de l'équation de la chaleur sur Q .

Définition 21. On définit le noyau de la chaleur sur le cercle par

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}.$$

Proposition 22. On a $u(x, t) = (f * H_t)(x)$.

2.2 Transformée de Fourier et application aux EDP

Définition 23. On appelle espace de Schwarz l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui sont à décroissance rapide, c'est-à-dire l'espace

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, \ell \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty \right\}.$$

Définition 24. On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

On utilise la notation $f(x) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ pour signifier que $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f .

Proposition 25. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On a

- $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi) e^{2i\pi h\xi}$,
- $f(x) e^{-2i\pi xh} \rightarrow \hat{f}(\xi+h)$,
- $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1}\xi)$.
- $f'(x) \rightarrow 2i\pi \hat{f}(\xi)$,
- $-2i\pi x f(x) \rightarrow \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$.

Proposition 26. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 27. On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{R}$ est une suite de « bons noyaux » lorsqu'elle vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} K_n(x) dx = 1$,
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |K_n(x)| dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| < +\infty} |K_n(x)| dx = 0$.

Proposition 28. Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de bons noyaux, alors pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * K_n - f\|_{\infty} = 0.$$

Théorème 29. (Formule d'inversion de Fourier).

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

Corollaire 30. On peut transformer une EDP sur u en une EDL sur $\hat{u}$ puis utiliser la formule d'inversion de Fourier pour obtenir u .

Exemple 31. L'équation de transport à célérité constante, après passage à la transformée de Fourier, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) + ic\xi \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}.$$

On en déduit que $\hat{u}(x, t) = e^{-ic\xi t} \hat{u}_0(\xi)$, et on retrouve, via la formule d'inversion de Fourier, la solution $u(x, t) = u_0(x - ct)$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Développement 1 :

Théorème 32. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ telle que

1. $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = f(x)$,
3. Si $g_t: x \mapsto u(x, t)$, alors

$$\forall T > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad M_{\alpha, \beta}^T := \sup_{|t| < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha g_t^{(\beta)}(x)| < \infty.$$

De plus, on connaît explicitement la solution u , qui est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi.$$

3 Problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^d$

3.1 Quasi-dérivées

Définition 33. Soit $u \in L^2(\Omega)$. On dit que u admet une quasi-dérivée partielle dans la direction j si il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad \left| \int_{\Omega} u(x) \partial_j \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2}.$$

Proposition 34.

1. Si $u \in L^2(\Omega)$ admet une quasi dérivée-partielle dans la direction j , alors il existe une unique fonction $u^{(j)} \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} u(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u^{(j)}(x) \varphi(x) dx.$$

2. Si de plus $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, alors $u^{(j)} = \partial_j u$.

3.2 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 35. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^2} = 0$, et où les suites $(\partial_j u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans L^2 .

Proposition 36. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors u admet des quasi dérivées partielles dans toutes les directions.

Proposition 37. *Muni de la norme définie par $N(u) := \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

3.3 Résolution du problème de Dirichlet sur $H_0^1(\Omega)$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère la fonctionnelle :

$$F: \begin{cases} \mathcal{C}_0^1(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx \end{cases}.$$

L'objectif est de trouver un minimum pour F , c'est-à-dire s'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ telle que

$$F(u) = \inf_{v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} F(v).$$

Proposition 38. *(Inégalité de Poincaré)*

Il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Corollaire 39. *La norme définie sur $H_0^1(\Omega)$ par $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2}$ est équivalente à N . En particulier, l'espace $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 40. *(Lax-Milgram simplifié).*

Soit H un espace de Hilbert réel, et ℓ une forme linéaire continue sur H .

Alors la fonction $F: \begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \langle \ell, u \rangle \end{cases}$ est minorée, et il existe un unique $v \in H$ tel que

$$F(v) = \inf_{u \in H} F(u) \quad \text{et} \quad \forall h \in H \quad \langle v, h \rangle_H = \langle \ell, h \rangle.$$

Développement 2 : (★)

Théorème 41. *(Résolution du problème de Dirichlet)*

- *La fonctionnelle F est minorée sur $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$. Elle se prolonge continûment à l'espace $H_0^1(\Omega)$ tout entier et on a*

$$\inf_{v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} F(v) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} F(v).$$

- *Cet infimum est atteint en un unique point u sur $H_0^1(\Omega)$, qui vérifie*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle f, v \rangle_{L^2}.$$

Remarque 42. La solution u trouvée vérifie donc en particulier, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$:

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

En intégrant par partie, on obtient

$$-\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Ceci montre que u est solution du problème « $\Delta u = f$ », où l'égalité est vue au sens des distributions.

(★) : Le développement comprend aussi la preuve de l'inégalité de Poincaré (prop 38).