P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
- Critère de Kalman

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Coron, Control and nonlinearity
3. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles
4. Khalil, Nonlinear systems
5. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel

On se donne un entier $n \geq 1$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Existence, structure et recherche des solutions

1.1 Existence et unicité

Définition 1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle équation linéaire sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre p une équation de la forme*

$$X^{(p)}(t) = A_{p-1}(t)\, X^{(p-1)}(t) + \cdots + A_0(t)\, Y(t) + B(t), \qquad (L)$$

où $A_{p-1}, \ldots, A_0 \colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dans $L^\infty(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

L'équation est dite homogène si B est la fonction nulle.

Proposition 2. *On peut ramener toute équation différentielle linéaire d'ordre p à une équation différentielle linéaire d'ordre 1. En effet, (L) s'écrit aussi :*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \\ \vdots \\ X^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \\ \vdots \\ X^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

On réduira donc l'étude à celle des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Développement 1 :

Théorème 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \colon I \to \mathbb{R}^n$ deux applications L^∞, et $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy*

$$(\mathcal{P}) \colon \begin{cases} x'(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Remarque 4. La version de ce théorème pour les équations différentielles d'ordre p est la suivante : pour $t_0 \in I$, pour tout $X_0, \ldots, X_{p-1} \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution φ de (L) définie sur I tout entier telle que $\varphi(t_0) = X_0, \ldots, \varphi^{(p-1)}(t_0) = X_{p-1}$.

Exemple 5. L'équation différentielle $(E) \colon y'' + 2y' + y = t e^t$ est linéaire. On peut se ramener à résoudre $X'(t) = A X(t) + B(t)$ en posant $X(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t e^t \end{pmatrix}$.

Une résolution (voir partie 1.3) montre alors que les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto \left(\frac{t-1}{4}\right) e^t + (\lambda t + \mu) e^{-t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.2 Espace des solutions

Théorème 6. *Soit $A \colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction L^∞. L'ensemble S_H des solutions (globales) de l'équation homogène $X'(t) = A(t)\, X(t)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Corollaire 7. *L'ensemble des solutions de (L) est un espace affine de dimension n. Toute solution de (L) s'écrit $V + V_0$, où V_0 est une solution particulière de (L) et V est solution de l'équation homogène $X'(t) = A(t)\, X(t)$.*

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension np.

Théorème 8. *(Principe de superposition)*

Si $X_1, \ldots, X_r$ sont des solutions de $(L) \colon X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$, alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^r \lambda_i X_i$ est solution de (L).

Définition 9. *Si $x_1, \ldots, x_m$ sont des solutions du système homogène $x'(t) = A(t)\, x(t)$, on appelle Wronskien de ces solutions la fonction W définie sur $[T_0, T_1]$ par*

$$W(t) := \det(x_1(t), \ldots, x_m(t)).$$

Proposition 10. *Avec les notations précédentes, on a pour tout* $t\in[T_0,T_1]$ *:*

$$W(t)=W(0)\exp\left(\int_{T_0}^{t}\mathrm{Tr}\,A(u)\,du\right).$$

Application 11. Si A ne dépend pas de t, on déduit de la proposition précédente la formule bien connue

$$\det(e^{tA})=e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}.$$

1.3 Résolvante et résolution explicite

On se donne un intervalle $]T_0,T_1[$ de $\mathbb{R}$, et on considère problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}_0):\left\{\begin{array}{l} x'(t)=A(t)\,x(t)+b(t)\\ x(T_0)=x_0\end{array}\right.,$$

avec $A\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $b\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^n)$.

Définition 12. *On appelle résolvante du système homogène* $x'(t)=A(t)\,x(t)$ *l'application* R *définie par*

$$R:\left\{\begin{array}{lll}[T_0,T_1]^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ (t_1,t_2) & \mapsto & R(t_1,t_2)\end{array}\right.,$$

de sorte que pour tout $t_2\in[T_0,T_1]$*, l'application* $R(\cdot,t_2):\left\{\begin{array}{l}[T_0,T_1]\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ t_1\mapsto R(t_1,t_2)\end{array}\right.$ *est solution du problème de Cauchy* $M'(t)=A(t)\,M(t)$, $M(t_2)=I_n$.

Proposition 13. *La résolvante* R *vérifie les propriétés suivantes.*

1. $R\in\mathcal{C}^0([T_0,T_1]^2,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2. $\forall t_1\in[T_0,T_1]\quad R(t_1,t_1)=I_n$.
3. $\forall(t_1,t_2,t_3)\in[T_0,T_1]^3\quad R(t_1,t_2)\,R(t_2,t_3)=R(t_1,t_3)$.

De plus, si $A\in\mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$*, alors* $R\in\mathcal{C}^1([T_0,T_1]^2,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *et on a, pour tout* $(t,\tau)\in[T_0,T_1]^2$ *:*

$$\frac{\partial R}{\partial t_1}(t,\tau)=A(t)\,R(t,\tau)\quad \text{et}\quad \frac{\partial R}{\partial t_2}(t,\tau)=-R(t,\tau)\,A(\tau).$$

Exemple 14. Si $A=\begin{pmatrix} t & -1\\ 1 & t\end{pmatrix}$, alors la résolvante R du système $x'(t)=A(t)\,x(t)$ vaut :

$$R(t_1,t_2)=\begin{pmatrix}\cos(t_1-t_2)\,e^{\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}} & -\sin(t_1-t_2)\,e^{\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}}\\ \sin(t_1-t_2)\,e^{\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}} & \cos(t_1-t_2)\,e^{\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}}\end{pmatrix}.$$

Théorème 15. *On suppose que pour tout* $(t,\tau)\in[T_0,T_1]^2$*, on a*

$$A(t)\,A(\tau)=A(\tau)A(t).\qquad (1)$$

Alors la résolvante s'obtient par la formule

$$R(t_1,t_2)=\exp\left(\int_{t_1}^{t_2}A(t)\,dt\right).$$

Remarque 16. Dans le cas où les coefficients ne dépendent pas du temps, cette formule s'écrit alors

$$R(t_1,t_2)=e^{A(t_2-t_1)}.$$

Remarque 17. Si la condition (1) n'est pas vérifiée, on ne dispose pas d'une formule générale pour calculer la résolvante.

Exemple 18. On pose $A(t)=\begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Alors on a

$$R(t_1,\quad t_2)\quad=\quad\begin{pmatrix}1 & (t_1-1)e^{t_1-t_2}-t_2+1\\ 0 & e^{t_1-t_2}\end{pmatrix}\quad \text{mais}\quad \exp\left(\int_{t_1}^{t_2}A(t)\quad d\quad t\right)\quad=\quad \begin{pmatrix}1 & \frac{t_1+t_2}{2}(e^{t_1-t_2}-1)\\ 0 & e^{t_1-t_2}\end{pmatrix}.$$

Théorème 19. *(Formule de Duhamel)*

La solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_0)$ *vérifie :*

$$\forall(t_0,t_1)\in[T_0,T_1]^2\qquad x(t_1)=R(t_1,t_0)\,x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}R(t_1,s)\,b(s)\,ds.$$

Cette formule s'obtient via la méthode dite de « variation de la constante ».

2 Etude des solutions

2.1 Stabilité des systèmes autonomes linéaires

Définition 20. *On appelle point d'équilibre du système un élément* $\overline{x}\in D$ *tel que* $f(\overline{x})=0$*. Quitte à poser* $g(x)=f(x+\overline{x})$*, on peut se ramener au cas où* $\overline{x}=0$*. On suppose désormais que* $f(0)=0$ *et on étudie dans ce qui suit la stabilité de l'origine.*

Définition 21. *On dit que le point d'équilibre $x=0$ est :*

- *stable si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $\|x(0)\|<\delta\Longrightarrow\forall t\geq 0\quad\|x(t)\|<\varepsilon$,*
- *instable si $x=0$ n'est pas stable,*
- *asymptotiquement stable si $x=0$ est stable et que δ peut être choisi de sorte que*

$$\|x(0)\|<\delta\Longrightarrow\lim_{t\to+\infty}x(t)=0.$$

Théorème 22. *Le point d'équilibre $x=0$ du système $x'(t)=Ax(t)$ est stable si et seulement si toutes les valeurs propres λ de A vérifient :*

$$\mathrm{Re}(\lambda)\leq 0\quad\text{et}\quad\mathrm{Re}(\lambda)=0\Longrightarrow\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)=n-q,$$

où q désigne la multiplicité algébrique de λ (c'est-à-dire sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de A).

Le point d'équilibre $x=0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toute valeur propre de A est de partie réelle strictement négative.

Théorème 23. *(Lemme de Gronwall)*

Soient φ,ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t\in[a,b]\quad y(t)\leq\varphi(t)+\int_a^t\psi(s)y(s)\,ds.$$

Alors on a

$$\forall t\in[a,b]\quad y(t)\leq\varphi(t)+\int_a^t\varphi(s)\,\psi(s)\exp\left(\int_s^t\psi(u)\,du\right)ds.$$

Corollaire 24. *Soit $y\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant*

$$\exists\alpha>0\quad\exists\beta>0\quad\forall t\in[a,b]\quad\|y'(t)\|\leq\beta+\alpha\,\|y(t)\|.$$

Alors

$$\forall t\in[a,b]\quad\|y(t)\|\leq\|y(a)\|\,e^{\alpha(t-a)}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)}-1).$$

Exemple 25. Soit $q\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Alors toutes les solutions de l'équation $y''+q(t)\,y=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Etude qualitative dans $\mathbb{R}^2$

On se place dans le cas $n=2$, et on considère l'équation à coefficients constants $Y'=AY$ avec $Y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ continue, et $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. L'allure de la trajectoire des solutions dépend alors des valeurs propres λ_1,λ_2 de A.

Tout est dans le Demailly, pages 290 à 294. Je ne refais pas les portraits de phase, il n'y a qu'à les recopier.

- Cas 1 : λ_1,λ_2 sont réelles. On distingue $\lambda_1\neq\lambda_2$ et $\lambda_1=\lambda_2$ (cas $\lambda>0$ et $\lambda<0$)
- Cas 2 : λ_1,λ_2 ne sont pas réelles. On obtient des spirales.

2.3 Théorie du contrôle, cas linéaire

On se donne un intervalle $]T_0,T_1[$ de $\mathbb{R}$, et on considère problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_0)\colon\begin{cases}x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)\\x(T_0)=x_0\end{cases},$$

avec $A\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ et $u\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^m)$ et $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Définition 26.

On dit que le système $x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ est contrôlable si pour tout $(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, il existe $u\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^m)$ tel que la solution $x\in\mathcal{C}^0(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_0)$ vérifie $x(T_0)=x_0$ et $x(T_1)=x_1$.

Définition 27. *On définit le Gramian de contrôlabilité du système $x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ comme la matrice $\mathfrak{C}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\mathfrak{C}:=\int_{T_0}^{T_1}R(T_1,s)\,B(s)B(s)^TR(T_1,s)^T\,ds,$$

où M^T signifie la transposée de M.

Théorème 28. *Le système de contrôle $x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ est contrôlable si et seulement si son Gramian de contrôle $\mathfrak{C}$ est inversible, et dans ce cas, une fonction de contôle $\overline{u}$ est donnée par*

$$\forall\tau\in[T_0,T_1]\qquad\overline{u}(\tau)=B(\tau)^TR(T_1,\tau)^T\mathfrak{C}^{-1}(x_1-R(T_1,T_0)\,x_0)$$

Proposition 29. *Soit $(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et $u\in L^2(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^m)$ tel que la solution du problème de Cauchy $x'(t)=A(t)\,x+B(t)\,u$, $x(T_0)=x_0$ vérifie $x(T_1)=x_1$.*

Alors le contrôle $\overline{u}$ du théorème 22 vérifie :

$$\int_{T_0}^{T_1}|\overline{u}(t)|^2\,dt\leq\int_{T_0}^{T_1}|u(t)|^2\,dt,$$

avec égalité si et seulement si $\overline{u}(t)=u(t)$ pour presque tout $t\in[T_0,T_1]$.

Exemple 30. Le système de contrôle $\begin{cases} x_1'(t) = u \\ x_2'(t) = x_1(t) + t\,u \end{cases}$ où $u \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$ avec $T > 0$ a pour Gramian de contrôlabilité $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1. On en déduit que ce système est contrôlable.

Développement 2 :

Théorème 31. *(Condition de Kalman indépendante du temps)*
On suppose que A, B et u ne dépendent pas du temps. Alors le système de contrôle $x'(t) = A\,x(t) + B\,u$ est contrôlable sur $[T_0, T_1]$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(A^i\,B\,u\ :\ u \in \mathbb{R}^m$ *et* $i \in \{0, \ldots, n-1\}) = \mathbb{R}^n$.

Théorème 32. *(Condition de Kalman dépendante du temps, Admis)*
On suppose qu'il existe $\bar{t} \in [T_0, T_1]$ tel que $\mathrm{Vect}(B_i(\bar{t})\,u,\ \ u \in \mathbb{R}^m,\ \ i \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}^n$. Alors le système de contrôle $x'(t) = A\,x(t) + B\,u$ est contrôlable sur $[T_0, T_1]$.

Annexe

Faire un dessin représentant la stabilité, la stabilité asymptotique et éventuellement un dessin pour le contrôle.