P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 220. Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions.

Devs :

- Critère de Kalman
- Théorème de Cauchy Lipschitz

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles
3. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
4. Khalil, Nonlinear systems
5. Coron, Control and nonlinearity

Dans tout ce qui suit, m désigne un entier naturel non nul.

1 Existence et unicité

1.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On considère le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Définition 1. *On appelle solution globale au problème $(\mathcal{P})$ une fonction $x: I \to \Omega$ dérivable et vérifiant les équations de $(\mathcal{P})$.*

Définition 2. *On appelle solution locale au problème $(\mathcal{P})$ tout couple (J, x), où $J \subset I$ est un voisinnage de t_0 et $x: J \to \Omega$ est dérivable, et vérifie les équations de $(\mathcal{P})$.*

Définition 3. *Si (J, x) et $(\tilde{J}, \tilde{x})$ sont des solutions locales de $(\mathcal{P})$, on dit que $(\tilde{J}, \tilde{x})$ prolonge (J, x) si $J \subset \tilde{J}$ et si $\tilde{x}$ coïncide avec x sur J.*

Définition 4. *On dit qu'une solution locale (J, x) est maximale si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle même.*

Remarque 5. Une solution maximale n'est pas nécessairement globale. Considérons par exemple le problème de Cauchy $y' = y^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\left(\mathbb{R}_-^*, t \mapsto -\frac{1}{t}\right)$ est une solution maximale à ce problème, mais elle n'est pas globale.

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Proposition 6. *(formulation intégrale d'un problème de Cauchy)*
Une fonction $x: I \to \mathbb{R}^m$ est solution au problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ si et seulement si

i. f est continue et $\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in I \times \Omega$.

ii. $\forall t \in I \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$.

Définition 7. *On dit qu'une application $f: E \to F$ est localement lipschitzienne autour d'un point $x_0 \in E$ s'il existe un voisinnage ouvert $U \subset E$ de x_0 et une constante $k_0 \geq 0$ tel que :*

$$\forall x, y \in U \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k_0 \cdot \|x - y\|.$$

Développement 1 :

Théorème 8. *(Théorème de Cauchy-Lipschitz)*
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable.
Si $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ sont fixés, alors le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ admet une unique solution maximale.

Exemple 9. L'équation (E): $y' = y^2$ avec pour condition initiale $y(0) = y_0$ admet pour unique solution maximale la fonction nulle si $y_0 = 0$, $\left(\left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[, t \mapsto \frac{y_0}{1 - t y_0}\right)$ si $y_0 > 0$ et $\left(\left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[, t \mapsto \frac{y_0}{1 - t y_0}\right)$ si $y_0 < 0$.

Exemple 10. L'équation (E): $y' = 3|y|^{2/3}$ admet deux solutions maximales car globales qui sont $y_1: t \mapsto 0$ et $y_2: \mapsto t \mapsto t^3$ (définies sur $\mathbb{R}$). La fonction $y \mapsto 3\,|y|^{2/3}$ n'est pas localement lipschitzienne autour de zéro.

Théorème 11. *(Théorème de Cauchy-Arzela-Peano)*
Si $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors $(\mathcal{P})$ admet une solution maximale, non nécessairement unique. La preuve de ce résultat repose sur le théorème d'Ascoli.

2 Etude des solutions

2.1 Outils pour l'étude des solutions : cas général

Théorème 12. *(Critère de sortie de tout compact)*
Une solution $y:]a, b[\to \mathbb{R}^m$ de $(\mathcal{P})$ est maximale si et seulement si $t \mapsto (t, y(t))$ s'échappe de tout compact K de $I \times \Omega$ quand $t \to a^+$ ou quand $t \to b^-$.
Comme les compacts de $I \times \Omega$ sont les parties fermées bornées de $I \times \Omega$, ceci signifie encore que $(t, y(t))$ s'échappe du bord de U quand $t \to a^+$ ou quand $t \to b^-$.

Exemple 13. L'équation (E) de l'exemple 9 avec pour condition initiale $y(1) = -1$ a pour solution maximale $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 14. *(Lemme de Gronwall)*
Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b] \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds.$$

Alors on a

$$\forall t \in [a, b] \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right) ds.$$

Corollaire 15. *Soit $y: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant*

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha\, \|y(t)\|.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b] \quad \|y(t)\| \leq \|y(a)\|\, e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\, (e^{\alpha(t-a)} - 1).$$

Exemple 16. Soit $q: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Alors toutes les solutions de l'équation $y'' + q(t)\, y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Outils pour l'étude des solutions : cas linéaire

On se donne un intervalle $]T_0, T_1[$ de $\mathbb{R}$, et on considère problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}_0): \begin{cases} x'(t) = A(t)\, x(t) + b(t) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $A \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $b \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathbb{R}^n)$.

Définition 17. *On appelle résolvante du système homogène $x'(t) = A(t)\, x(t)$ l'application R définie par*

$$R: \begin{cases} [T_0, T_1]^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (t_1, t_2) & \mapsto & R(t_1, t_2) \end{cases},$$

de sorte que pour tout $t_2 \in [T_0, T_1]$, l'application $R(\cdot, t_2): \begin{cases} [T_0, T_1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t_1 \mapsto R(t_1, t_2) \end{cases}$ est solution du problème de Cauchy $M'(t) = A(t)\, M(t)$, $M(t_2) = I_n$.

Proposition 18. *La résolvante R vérifie les propriétés suivantes.*

1. $R \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1]^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2. $\forall t_1 \in [T_0, T_1] \quad R(t_1, t_1) = I_n$.
3. $\forall (t_1, t_2, t_3) \in [T_0, T_1]^3 \quad R(t_1, t_2)\, R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$.

De plus, si $A \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors $R \in \mathcal{C}^1([T_0, T_1]^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et on a, pour tout $(t, \tau) \in [T_0, T_1]^2$:

$$\frac{\partial R}{\partial t_1}(t, \tau) = A(t)\, R(t, \tau) \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial t_2}(t, \tau) = -R(t, \tau)\, A(\tau).$$

Exemple 19. Si $A = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, alors la résolvante R du système $x'(t) = A(t)\, x(t)$ vaut :

$$R(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos(t_1 - t_2)\, e^{\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2}} & -\sin(t_1 - t_2)\, e^{\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2}} \\ \sin(t_1 - t_2)\, e^{\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2}} & \cos(t_1 - t_2)\, e^{\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

Théorème 20. *(Formule de Duhamel)*
La solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_0)$ vérifie :

$$\forall (t_0, t_1) \in [T_0, T_1]^2 \qquad x(t_1) = R(t_1, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} R(t_1, s)\, b(s)\, ds.$$

Définition 21. *Si $x_1, \ldots, x_m$ sont des solutions du système homogène $x'(t) = A(t)\, x(t)$, on appelle Wronskien de ces solutions la fonction W définie sur $[T_0, T_1]$ par*

$$W(t) := \det(x_1(t), \ldots, x_m(t)).$$

Proposition 22. *Avec les notations précédentes, on a pour tout $t \in [T_0, T_1]$:*

$$W(t) = W(0) \exp\left(\int_{T_0}^t \operatorname{Tr} A(u)\, du\right).$$

Application 23. Si A ne dépend pas de t, on déduit de la proposition précédente la formule bien connue

$$\det(e^{tA}) = e^{t \operatorname{Tr}(A)}.$$

3 Stabilité des systèmes autonomes

Dans cette partie, on considère le système autonome $x'(t) = f(x(t))$, où $f: D \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur un ouvert connexe $D \subset \mathbb{R}^n$.

3.1 Définitions et exemples

Définition 24. *On appelle point d'équilibre du système un élément $\bar{x} \in D$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Quitte à poser $g(x) = f(x + \bar{x})$, on peut se ramener au cas où $\bar{x} = 0$. On suppose désormais que $f(0) = 0$ et on étudie dans ce qui suit la stabilité de l'origine.*

Définition 25. *On dit que le point d'équilibre $x=0$ est :*

- *stable si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $\|x(0)\|<\delta \Longrightarrow \forall t\geq 0 \quad \|x(t)\|<\varepsilon$,*
- *instable si $x=0$ n'est pas stable,*
- *asymptotiquement stable si $x=0$ est stable et que δ peut être choisi de sorte que*

$$\|x(0)\|<\delta \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} x(t)=0.$$

Exemple 26.

On considère l'équation $\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -a\sin(x_1(t))-b\sin(x_2(t)) \end{cases}$.

Elle admet deux points d'équilibre $(x_1=0, x_2=0)$, qui est stable mais pas asymptotiquement stable, et $(x_1=\pi, x_2=0)$, qui est instable.

3.2 Critères de stabilité (cas linéaire et cas global)

Théorème 27. *Le point d'équilibre $x=0$ du système $x'(t)=Ax(t)$ est stable si et seulement si toutes les valeurs propres λ de A vérifient :*

$$\mathrm{Re}(\lambda)\leq 0 \quad et \quad \mathrm{Re}(\lambda)=0 \Longrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I_n)=n-q,$$

où q désigne la multiplicité algébrique de λ (c'est-à-dire sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de A).

Le point d'équilibre $x=0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toute valeur propre de A est de partie réelle strictement négative.

Lemme 28.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Re}(\mathrm{Sp}(A))\subset]-\infty,0[$. Alors il existe $\sigma, K>0$ tels que :

$$\forall t\in[0,+\infty[\qquad \|\exp(tA)\| \;\leq\; Ke^{-\sigma t}$$

Théorème 29.

Soit $f\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$.

1. *Si les valeurs propres de la jacobienne en zéro $A:=Jf(0)$ sont toutes à partie réelle strictement négatives, alors 0 est asymptotiquement stable.*
2. *Si l'une des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive, alors 0 est instable.*

Exemple 30.

On considère le système $\begin{cases} x''(t)+\varepsilon\,(x^2(t)-1)\,x'(t)+x(t)=0 \\ x(0)=x_0 \text{ et } x'(0)=x_1 \end{cases}$, avec $\varepsilon<0$. Alors $Jf(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et 0 est asymptotiquement stable.

Exemple 31.

On considère le système $\begin{cases} x'(t)=\alpha x(t)^3 \\ y'(t)=\beta y^3(t) \end{cases}$. On a $Jf(0)=0$ (le théorème 29 ne permet pas de conclure). On montre par une résolution directe que $(0,0)$ est asymptotiquement stable si $\alpha<0$ et $\beta<0$, instable si $\alpha>0$ ou $\beta>0$.

4 Contrôle des systèmes linéaires : une introduction

On se donne un intervalle $]T_0,T_1[$ de $\mathbb{R}$, et on considère problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_0)\colon \begin{cases} x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t) \\ x(T_0)=x_0 \end{cases},$$

avec $A\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ et $u\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^m)$ et $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Définition 32.

On dit que le système $x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ est contrôlable si pour tout $(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, il existe $u\in L^\infty(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^m)$ tel que la solution $x\in\mathcal{C}^0(]T_0,T_1[,\mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_0)$ vérifie $x(T_0)=x_0$ et $x(T_1)=x_1$.

Définition 33. *On définit le Gramian de contrôlabilité du système $x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ comme la matrice $\mathfrak{C}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\mathfrak{C} := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)\,B(s)B(s)^T R(T_1,s)^T ds,$$

où M^T signifie la transposée de M.

Théorème 34. *Le système de contrôle $x'(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)$ est contrôlable si et seulement si son Gramian de contrôle $\mathfrak{C}$ est inversible.*

Exemple 35. Le système de contrôle $\begin{cases} x_1'(t)=u \\ x_2'(t)=x_1(t)+tu \end{cases}$ où $u\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,T]$ avec $T>0$ a pour Gramian de contrôlabilité $\mathfrak{C}=\begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1. On en déduit que ce système est contrôlable.

Développement 2 :

Théorème 36. *(Condition de Kalman)*

On suppose que A, B et u ne dépendent pas du temps. Alors le système de contrôle $x'(t)=Ax(t)+Bu$ est contrôlable sur $[T_0,T_1]$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(A^iBu\,:\ u\in\mathbb{R}^m$ et $i\in\{0,\ldots,n-1\})=\mathbb{R}^n$.