

Leçon 215. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème des extréma liés
- Lemme de Morse

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
3. Avez, Calcul différentiel
4. Zavodivique, Un max de maths

1 Calcul différentiel du premier ordre

On se donne E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, et U un ouvert de E .

1.1 Différentiabilité : définition et exemples

Définition 1. Une application $f: U \rightarrow F$ est dite différentiable au point $a \in U$ si il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Proposition 2. Si elle existe, l'application L définie plus haut est unique. On l'appelle la différentielle de f au point a , et on la note $Df(a)$ ou df_a .

Exemple 3. Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est linéaire, alors φ est différentiable en tout point $a \in E$ et $D\varphi(a) = \varphi$.

Exemple 4. Si $\psi: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire, alors φ est différentiable en tout point $(a, b) \in E \times F$ et $D\psi(a, b)(h_1, h_2) = \psi(a, h_2) + \psi(b, h_1)$.

Exemple 5. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f: E \rightarrow E$ définie sur $B(0, 1) = \{\|M\| < 1\}$ par $f(M) = M^{-1}$. Alors f est différentiable sur $B(0, 1)$ et $Df(X) \cdot H = -X^{-1}HX^{-1}$.

Lemme 6. $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 7. On considère la fonction $\det: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\det$ est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tout $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a la formule suivante :

$$D\det(X) \cdot H = \text{Tr}(\text{Com}(X)^T H)$$

où $\text{Com}(X)^T$ désigne la transposée de la comatrice de M .

Proposition 8. Si $f: U \rightarrow F$ est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a .

Définition 9. On dit que $f: U \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si $x \mapsto Df(x)$ est continue de U dans l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre U et un ouvert V de F si elle est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, et de réciproque $f^{-1}: V \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

Théorème 10. Soit E, F, G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E , V un ouvert de F , et des applications $f: U \rightarrow V$ et $g: V \rightarrow G$. On suppose que f est différentiable en un point $a \in U$ et que g est différentiable en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

1.2 Dérivées partielles, dérivées directionnelles

Définition 11. Soit $v \in E$ et $a \in U$. On dit que f est dérivable en a dans la direction u si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

existe. Dans ce cas, on note cette limite $f'_v(a)$ et on dit que c'est la dérivée directionnelle de f en a pour la direction v .

Proposition 12. Si f est différentiable en $a \in U$ et si $v \in E$, alors f est dérivable en a dans la direction v et on a $f'_v(a) = Df(a)(v)$.

Définition 13. On suppose que E admet pour base $(e_1, \dots, e_n)$. Lorsque cela a un sens, on définit la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de $f: U \rightarrow F$ au point $a \in U$ comme la dérivée directionnelle de f en a dans la direction e_i .

Proposition 14. Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles en a et on a

$$Df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Exemple 15. L'existence des dérivées partielles ne suffit pas à entraîner la différentiabilité. Par exemple, $f: (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ admet des dérivées partielles toutes nulles à l'origine, mais elle n'est pas différentiable (ni même continue) en ce point.

Théorème 16. Pour que $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ en tout point de U et que ces dérivées partielles soient continus sur U .

Définition 17. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$, la différentielle $Df(a)$ est la forme linéaire dont les composantes sont $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ dans la base canonique. Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, il existe une unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$, appelé gradient de f en a , tel que $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Définition 18. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$, la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ est appelée la jacobienne de f en a .

1.3 Inégalité de la moyenne

Théorème 19. (Inégalité de la moyenne).

Soit $f: U \rightarrow F$ une application différentiable en tout point de U . Soit $[a, b]$ un segment de droite contenu dans U et $k > 0$. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq k$. Alors on a $\|f(b) - f(a)\|_F \leq k \|b - a\|_E$.

Corollaire 20. Soit $f: U \rightarrow F$ différentiable sur U .

- Si U est un ouvert convexe de E et si $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq k$ pour tout $x \in U$, alors l'application f est k -lipschitzienne sur U , c'est-à-dire

$$\forall x, y \in U \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

- Si U est un ouvert convexe de E et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U .

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 21. Pour $k \geq 1$, l'application $f: U \rightarrow F$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa différentielle Df est différentiable en tout points, de différentielle continue sur U .

Définition 22. De manière générale, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Cela revient à dire qu'elle admet des dérivées partielles de tout ordre $\leq k$, continue sur U .

Notation 23. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U . Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on note

$$D^k f(a)(h)^k := D^k f(a) \underbrace{(h, \dots, h)}_{k \text{ fois}}.$$

Proposition 24. (Formule de Taylor avec reste intégral)

Si $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$ et s'il existe $a, h \in U$ tels que $[a, a+h] \subset U$, alors

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{1-t}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt.$$

2 Théorèmes fondamentaux

2.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 25. (Théorème d'inversion locale).

Soit $a \in U$, et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\det Df(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Théorème 26. (Théorème du changement de coordonnées).

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$. Les relations

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si et seulement si le déterminant jacobien $\det(\partial f_i / \partial x_j)(a)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_n(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 27. L'application $(x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = (r, \theta)$ donne le passage en coordonnées polaires sur le demi-plan ouvert $\{x \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Application 28. L'application $\exp$ est différentiable au point $0 \in \mathbb{C}[A]$ et $D(\exp)(0) = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \in \text{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Elle induit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de I_n dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Corollaire 29. L'exponentielle de matrices $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Développement 1 :

Lemme 30. (Réduction différentiable des formes quadratiques)

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage V de A_0 et une application $\Psi: V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V \quad A = \Psi(A)^T A_0 \Psi(A).$$

Théorème 31. (Lemme de Morse)

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f , c'est-à-dire que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $Df^2(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe deux voisinages V et W de l'origine et un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi: V \rightarrow W$ tel que $\varphi(0) = 0$, et en notant $u = (u_1, \dots, u_n) =: \varphi(x)$ pour $x \in U$, on a :

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2.$$

2.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 32. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U$ et $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a, b)$, formée des dérivées partielles par rapport à y , est inversible, i.e. $\text{Det } D_y f(a, b) \neq 0$.

Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi: V \rightarrow W$, de classe $\mathcal{C}^1$ unique telle que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \implies (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

De plus, $D_y f(x, y)$ est inversible et pour tout $(x, y) \in V \times W$, ce qui permet le calcul de $D\varphi(x)$.

Exemple 33. On considère l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a $f'_y(x, y) = 2y$. En prenant $(0, 1)$ ou $(0, -1)$ pour point de départ, l'équation définit deux fonctions implicites φ_1 et φ_2 , avec

$$V_1 =]-1, 1[, \quad W_1 =]0, +\infty[, \quad y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$V_2 =]-1, 1[, \quad W_2 =]-\infty, 0[, \quad y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Remarque 34. Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites sont en fait équivalents.

2.3 Sous-variétés

Définition 35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m en un point $x_0 \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Proposition 36. (Définition implicite).

On suppose qu'il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U contenant x_0 , à valeurs réelles, telles que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ et que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.

Alors l'ensemble $M = \{x \in U : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ est une sous-variété en x_0 de dimension m .

Définition 37. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x_0 \in M$. On appelle espace tangent en x_0 à M l'ensemble :

$$T_{x_0}(M) = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists I \in \mathcal{I} \quad \exists \gamma \in D^1(I, M), \quad \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

Où l'on a noté $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts contenant 0, et $D^1(I, M)$ est l'ensemble des applications différentiables de I vers M , pour $I \in \mathcal{I}$.

Proposition 38. $T_{x_0}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de même dimension que M .

Théorème 39. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 , que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ tel que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.

On note $M = \{x \in U : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ la sous-variété associée. Alors on a :

$$T_{x_0}(M) = \bigcap_{i=1}^{n-m} \text{Ker}(D\varphi_i(x_0))$$

3 Application à la recherche d'extrema

3.1 Conditions nécessaires d'extremum.

3.1.1 Condition nécessaire d'ordre 1

Théorème 40. Si f est différentiable sur U et admet un extremum relatif en un point $a \in U$, alors $df_a = 0$. Un point a pour lequel $df_a = 0$ est appelé un point critique de f .

Remarque 41. La réciproque est fausse en général.

Théorème 42. (Rolle)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors f' s'annule au moins en un point $c \in]a, b[$.

3.1.2 Conditions d'ordre 2

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 43. (Lemme de Schwarz).

La différentielle seconde est symétrique : $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$.

Théorème 44. (Formule de Taylor-Young à l'ordre deux)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x + h] \subset U$. Alors

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} + o(\|h\|^2),$$

avec

$$\left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} := \sum_{i=1}^n h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Corollaire 45.

- Si f admet un minimum (resp un maximum) relatif en $a \in U$, alors la forme quadratique $Q(h) = \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} = \langle Hf(h), h \rangle$ est positive (resp. négative).
- Si $Q(h) = \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} = \langle Hf(h), h \rangle$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. un maximum) local en a .

Remarque 46. Si Q est seulement positive, l'existence d'un minimum relatif en a n'est pas assurée. Par exemple, $x \mapsto x^3$ en $a=0$ vérifie $Q=0$, et pourtant cette fonction n'a pas d'extremum relatif en zéro.

3.2 Théorème des extrema liés et applications

Lemme 47. Soit $v, u_1, \dots, u_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $u_1, \dots, u_k$ sont linéairement indépendantes, et que $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(u_i) \subset \text{Ker}(v)$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$.

Développement 2 :

Théorème 48. *Théorème des extrema liés*

Soit $f, g_1, \dots, g_k: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$, et $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. On suppose que $f|_M$ admet un extremum local en $m \in M$, et que la famille $(Dg_i(m))_{0 \leq i \leq k}$ est libre. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Df(m) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Dg_i(m)$$

Exemple 49. (Inégalité arithmético-géométrique).

$$\text{On a } \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Théorème 50. On considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors l'inégalité :

$$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

Avec égalité si et seulement si les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base orthogonale de E .