

Leçon 214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Devs :

- Lemme de Morse
- Théorème des extréma liés par la géométrie différentielle

Références :

- Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
- Avez, Calcul différentiel
- Gourdon, Analyse
- Zavidovique, Un max de maths
- Objectif Agrégation

On se donne $n \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1 Théorème d'inversion locale

1.1 Théorème et premiers exemples

Théorème 1. (Théorème d'inversion locale).

Soit $a \in U$, et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\det Df(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que $f|_V^W$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Exemple 2. L'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (s, p) = (x + y, xy)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\{x > y\}$ vers $\{s^2 - 4p > 0\}$.

Théorème 3. (Théorème d'inversion globale).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective sur U et que pour tout $x \in U$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U vers $f(U)$.

Exemple 4. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi = f - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est k -contractante (avec $0 < k < 1$). Alors f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local au voisinage de tout points mais ce n'est pas un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme global.

Exemple 6. Soit $f: x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ mais f n'est inversible sur aucun voisinage de zéro.

1.2 Applications en algèbre linéaire

Définition 7. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle changement de coordonnées sur V la donnée de n fonctions $f_1, \dots, f_n: V \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'application $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = (u_1, \dots, u_n)$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 8. Les relations $u_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j$ définissent un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ si (a_{ij}) est une matrice inversible.

Exemple 9. L'application $(x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = (r, \theta)$ donne le passage en coordonnées polaires sur le demi-plan ouvert $\{x \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Théorème 10. (Théorème du changement de coordonnées).

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$. Les relations

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si et seulement si le déterminant jacobien $\det(\partial f_i / \partial x_j)(a)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_n(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 11. Ce théorème est simplement une reformulation du théorème d'inversion locale.

Corollaire 12. Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$. On peut les compléter par des fonctions $f_{p+1}, \dots, f_n$ en un changement de coordonnées au voisinage de a sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 13. L'application $\exp$ est différentiable au point $0 \in \mathbb{C}[A]$ et $D(\exp)(0) = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \in \text{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Elle induit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de I_n dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 14. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Corollaire 15. L'exponentielle de matrices $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Corollaire 16. L'exponentielle de matrices $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ a pour image $\{M^2 : M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Proposition 17. (Racine $k^{\text{ème}}$ d'une matrice).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est suffisamment proche de I_n , alors A est une racine $k^{\text{ème}}$, c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$.

1.3 Applications en calcul différentiel

Développement 1 :

Lemme 18. (Réduction différentiable des formes quadratiques)

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage V de A_0 et une application $\Psi: V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V \quad A = \Psi(A)^T A_0 \Psi(A).$$

Théorème 19. (Lemme de Morse)

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f , c'est-à-dire que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe deux voisinages V et W de l'origine et un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi: V \rightarrow W$ tel que $\varphi(0) = 0$, et en notant $u = (u_1, \dots, u_n) =: \varphi(x)$ pour $x \in U$, on a :¹

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2.$$

2 Théorème des fonctions implicites

On se donne $p \in \mathbb{N}$.

2.1 Théorème et premiers exemples

Théorème 20. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U$ et $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a, b)$, formée des dérivées partielles par rapport à y , est inversible, i.e. $\text{Det } D_y f(a, b) \neq 0$.

Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi: V \rightarrow W$, de classe $\mathcal{C}^1$ unique telle que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \implies (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

De plus, $D_y f(x, y)$ est inversible et pour tout $(x, y) \in V \times W$, ce qui permet le calcul de $D\varphi(x)$.

Exemple 21. On considère l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a $f'_y(x, y) = 2y$. En prenant $(0, 1)$ ou $(0, -1)$ pour point de départ, l'équation définit deux fonctions implicites φ_1 et φ_2 , avec

$$V_1 =]-1, 1[, \quad W_1 =]0, +\infty[, \quad y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$V_2 =]-1, 1[, \quad W_2 =]-\infty, 0[, \quad y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Remarque 22. Le théorème reste valide en remplaçant $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, ou en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^1$ par holomorphe.

Remarque 23. Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites sont en fait équivalents.

2.2 Quelques applications

Proposition 24. Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0 . Alors il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall P \in U \quad \forall x \in V \quad x = \varphi(P) \iff P(x) = 0.$$

Autrement dit, la racine dépend localement du polynôme de manière $\mathcal{C}^\infty$.

Application 25. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème 26. (Equation de Burgers).

Soit $a, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'équation aux dérivées partielles de Burgers

$$a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } u(x, 0) = f(x)$$

admet pour solution la fonction u définie par $u(x, y) = \frac{1-x}{1-y}$ sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R} : y < 1\}$.

3 Sous-variétés, espace tangent, et extrema liés

3.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m en un point $x_0 \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Proposition 28. (Définition implicite).

On suppose qu'il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U contenant x_0 , à valeurs réelles, telles que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ et que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.

Alors l'ensemble $M = \{x \in U : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ est une sous-variété en x_0 de dimension m .

Proposition 29. (Définition en tant que graphe).

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x_0 , un voisinage U' de $((x_0)_1, \dots, (x_0)_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ et $n - m$ fonctions $g_i: U' \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que (à permutation éventuelle des x_i près) on ait $x \in M \cap U \iff (x_1, \dots, x_m) \in U'$ et $x_{m+1} = g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, x_n = g_{n-m}(x_1, \dots, x_m)$.

Alors M est une sous-variété en x_0 de dimension m .

Proposition 30. (Définition paramétrique).

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^m$ et n fonctions $\varphi_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que l'application

$$\varphi: u = (u_1, \dots, u_m) \mapsto x = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$$

soit un homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$, avec $x_0 = \varphi(0)$, et que $D\varphi(0)$ soit injective.

Alors M est une sous-variété en x_0 de dimension m .

3.2 Espace tangent

Définition 31. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x_0 \in M$. On appelle espace tangent en x_0 à M l'ensemble :

$$T_{x_0}(M) = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists I \in \mathcal{I} \quad \exists \gamma \in D^1(I, M), \quad \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

Où l'on a noté $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts contenant 0, et $D^1(I, M)$ est l'ensemble des applications différentiables de I vers M , pour $I \in \mathcal{I}$.

Proposition 32. $T_{x_0}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de même dimension que M .

Théorème 33. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 , que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ tel que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.

On note $M = \{x \in U : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ la sous-variété associée. Alors on a :

$$T_{x_0}(M) = \bigcap_{i=1}^{n-m} \text{Ker}(D\varphi_i(x_0))$$

3.3 Théorème des extrema liés. Applications.

Lemme 34. Soit $v, u_1, \dots, u_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $u_1, \dots, u_k$ sont linéairement indépendantes, et que $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(u_i) \subset \text{Ker}(v)$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$.

Développement 2 :

Théorème 35. Théorème des extrema liés

Soit $f, g_1, \dots, g_k: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$, et $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. On suppose que $f|_M$ admet un extremum local en $m \in M$, et que la famille $(Dg_i(m))_{0 \leq i \leq k}$ est libre. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Df(m) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Dg_i(m)$$

Exemple 36. (Inégalité arithmético-géométrique).

$$\text{On a } \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Théorème 37. On considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors l'inégalité :

$$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

Avec égalité si et seulement si les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base orthogonale de E .

4 Annexe

Faire les dessins pour le TIL, le TFI, et pour le plan tangent.