

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème de Féjer
- Critère de Weyl

Références :

1. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
2. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
3. Gourdon, Analyse
4. Quéffélec, Analyse pour l'agrégation
5. Autre (en particulier, poly d'analyse fonctionnelle du M1 de P6)

Idee générale de la leçon : pour démontrer un résultat sur un espace mal connu, on restreint la preuve à un espace plus petit et mieux connu, puis on utilise des théorèmes d'approximation pour conclure.

1 Approximation polynomiale

1.1 Approximation locale

Théorème 1. (Formule de Taylor Young)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et F une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Soit $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \rightarrow 0$ on a

$$F(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(|h|^{n+1}).$$

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue.

Théorème 3. (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors

$$F(b) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt.$$

Application 4. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe un polynôme P de degré impair vérifiant, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(m)}(x)| \leq |P(x)|$. Alors f est la fonction nulle.

Application 5. L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Approximation uniforme sur un compact

Définition 6. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle module de continuité de f la fonction ω_f définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall h \in [0, 1] \quad \omega_f(h) = \sup \{|f(u) - f(v)| : |u - v| \leq h\}.$$

Proposition 7. La fonction ω vérifie les propriétés suivantes.

- ω est croissante.
- Pour tout $h_1, h_2 \in [0, 1]$, on a $\omega_f(h_1 + h_2) \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$.
- Pour tout $h \in [0, 1]$ et $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda h \in [0, 1]$, on a $\omega_f(\lambda h) \leq (\lambda + 1) \omega_f(h)$.

Théorème 8. (Bernstein)

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f, x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Alors :

1. B_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
2. Plus précisément, on a $\|f - B_n\|_\infty \leq C \cdot \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, où $C \geq 0$ est une constante.

Corollaire 9. (Weierstrass)

L'espace des polynômes $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

Application 10. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $f = 0$.

On peut généraliser le théorème de Weierstrass sur un espace métrique compact non vide (X, d) , de la manière suivante.

Lemme 11. On suppose que (X, d) est compact et contient au moins deux éléments. Soit H une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall a, b \in H \quad \sup(u, v) \in H$ et $\inf(u, v) \in H$. (partie réticulée)
2. Si x et y sont deux points distincts quelconques de X et si α, β sont des réels, alors il existe $u \in H$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$. (partie séparante)

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Théorème 12. (Théorème de Stone-Weierstrass)

Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ réticulé et séparant, contenant les fonctions constantes. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Exemple 13. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

2 Approximation trigonométrique

2.1 Intégration sur $\mathbb{T}$

On se place sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on identifie les fonctions sur $\mathbb{T}$ à valeurs complexes avec les fonctions 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{T}$ de la mesure $\bar{\lambda}$ définie par $\bar{\lambda}(A + 2\pi\mathbb{Z}) = \lambda(A \cap [0, 2\pi])$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, de sorte que pour toute fonction f borélienne positive sur $\mathbb{T}$ ou dans $L^1(\bar{\lambda})$, on ait

$$\int_{\mathbb{T}} f d\bar{\lambda} = \int_{[0, 2\pi[} f d\lambda.$$

Dans la suite, on notera simplement λ , ou « dx » la mesure $\bar{\lambda}$, qui est donc la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{T}$.

Définition 14. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt.$$

On appelle série de Fourier associée (formellement) à f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$, et on note $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à cette dernière.

Définition 15. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. On définit la convolution $f * g$ de f et de g sur $\mathbb{T}$ par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(y) g(x - y) dy.$$

Proposition 16. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$. On a les propriétés suivantes :

1. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
2. $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$.
3. $f * g = g * f$.
4. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
5. $f * g \in C^0(\mathbb{T})$.
6. $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Famille de « bons noyaux »

Définition 17. On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{T}$ est un « bon noyau » lorsqu'elle vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1$,
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx = 0$.

Théorème 18. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un bon noyau et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Pour tout point de continuité x de f , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors la limite est uniforme.

Définition 19. On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer les suites de fonctions respectives $(D_N)_{N \geq 1}$ et $(F_N)_{N \geq 1}$ définies sur $\mathbb{T}$ par :

$$\forall N \geq 1 \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} \quad \text{et} \quad F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Développement 1 :

Théorème 20. (Théorème de Féjer)

Pour tout $x \in \mathbb{T}$ non nul, on a $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, et le noyau de Féjer est un bon noyau.

Cela signifie en particulier, que pour une fonction $f \in C^0(\mathbb{T})$, la somme partielle de ses coefficients de Fourier $S_N(f)$ définie sur $\mathbb{T}$ par $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} = (f * D_N)(t)$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f .

Application 21. (Théorème de Weierstrass trigonométrique)

L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $C^0(\mathbb{T})$.

2.3 Application : un critère d'équirépartition

Définition 22. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0, 1[$ est équirépartie si pour tout intervalle ouvert $]a, b[\subset [0, 1[$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}\{1 \leq n \leq N : x_n \in]a, b[\}}{N} = b - a.$$

Cela signifie que pour N assez grand, la proportion d'éléments x_n dans $]a, b[$ pour $1 \leq n \leq N$, s'approche du quotient de la longueur de l'intervalle $]a, b[$ par la longueur de l'intervalle $[0, 1[$.

Proposition 23.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$ tels que $a < b$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[a, b[}(x_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_{[a, b[}(x) dx.$$

Développement 2 :

Théorème 24. (Critère de Weyl)

On se donne une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0, 1[$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi k x_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemple 25. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels est équirépartie modulo 1 lorsque la suite $(x_n - \lfloor x_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

Le théorème de Weyl permet alors de montrer facilement que pour $\gamma > 0$, la suite $(n\gamma)_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement si γ est irrationnel.

3 Convolution et régularisation

3.1 Convolution sur $\mathbb{R}^d$ et approximations de l'unité.

Définition 26. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On se donne $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. On définit la convolution de f et g sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy.$$

Proposition 27. La convolution sur $\mathbb{R}^d$ est bilinéaire et symétrique.

Proposition 28. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. La fonction $f * g$ est uniformément continue et bornée, et on a l'inégalité

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Par ailleurs, si $1 < p < \infty$, alors $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f * g(x)| = 0$. Cette conclusion demeure si $p = 1$ et si g est à support compact.

Proposition 29. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp}(f) + \text{Supp}(g)},$$

où $\text{Supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$ est le support de f .

Théorème 30. (Inégalité de Young)

Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est bien définie et si l'on pose $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, alors $f * g \in L^r$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 31. (Admis, preuve longue et technique)

Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Définition 32. On appelle encore bons noyau, ou approximation de l'unité, une suite de fonction $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui satisfait les propriétés de la définition 17, en remplaçant $\mathbb{T}$ par $\mathbb{R}^d$.

Exemple 33. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact d'intégrale 1, obtenue par exemple grâce à la fonction f de l'exemple 5. Alors la famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx)$$

est une approximation de l'unité.

Exemple 34. On pose ici $d = 1$. La famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $K_n(x) = \sqrt{n} e^{-\pi n x^2}$ est une approximation de l'unité.

On dispose alors d'un résultat similaire au théorème 18.

Théorème 35. Soit $p \in [1, \infty[$ et soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \phi_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f * \phi_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Application 36. L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Application 37. (Formule d'inversion de Fourier)

Soit f un élément de l'espace Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, \ell \in \mathbb{N} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty \right\}$. On définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx.$$

On a alors la formule d'inversion de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi.$$

En particulier, l'application $\mathcal{F}$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ est injective.

3.2 Application aux distributions.

Définition 38. On dit qu'une forme linéaire T sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une distribution si pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe $p_K \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à support dans K on ait

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|.$$

S'il existe p tel que l'on ait $p_K \leq p$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, on dit que T est une distribution d'ordre inférieur à p .

Exemple 39. Soit $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Si $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la distribution $[f]$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \quad \langle [f], \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) dx.$$

Proposition 40. Soit $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que la distribution $[f]$ soit nulle. Alors $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 41. Soit T une distribution. On définit la dérivée distributionnelle de T , notée T' , par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \quad \langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle.$$

Proposition 42. Soit T une distribution de dérivée distributionnelle nulle. Alors T est constante.

Théorème 43. (Rademacher)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est lipschitzienne si et seulement si il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) - f(y) = \int_x^y g(t) dt.$$