P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications

Devs :

- Théorème de Hahn-Banach analytique
- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Théorème de Radon Nikodym

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
3. Hauchecorne, Contres-exemples en mathématiques
4. Rudin, Analyse réelle et complexe
5. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
6. Objectif Agrégation

On se donne K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définitions et exemples

Définition 1. *On appelle norme sur E une application $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant*

- $\forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, *(homogénéité)*
- $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, *(séparation)*
- $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Si E est muni d'une norme, on dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 2.

- L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, et $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.
- L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, pour $p \in [1, +\infty[$.
- L'application $f \mapsto \int_X f^2 \, d\mu$ est une norme sur $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition 3. *On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes si*

$$\exists a > 0 \quad \exists b > 0 \quad \forall x \in E \quad a \, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \, \|x\|_1.$$

Exemple 4. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Les applications $\|\|_1: f \mapsto \int_0^1 |f(t)| \, dt$ et $\|\cdot\|_\infty: f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(x)|$ sont des normes sur E, qui ne sont pas équivalentes.

Proposition 5. *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, l'application $d: (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E.*

Proposition 6. *L'application $x \mapsto \|x\|$ est continue.*

Proposition 7. *Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, \|\cdot\|)$, alors son adhérence $\bar{F}$ est un sous-esapce vectoriel de E.*

1.2 Applications linéaires continues

Dans cette partie, E et F désignent des K-espaces vectoriels normés.

Théorème 8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *f est continue sur E,*
- *f est continue en 0,*
- *f est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ de E,*
- *il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M \, \|x\|$ pour tout $x \in E$,*
- *f est lipschitzienne,*
- *f est uniformément continue sur E.*

Définition 9. *L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E, F)$. C'est un espace vectoriel normé, muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ définie par*

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F) \quad |||f||| := \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|.$$

Proposition 10. *Soit E, F, G trois e.v.n, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et on a $|||g \circ f||| \leq |||g||| \cdot |||f|||$: la norme d'opérateur est une norme d'algèbre.*

Proposition 11. *Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau $\operatorname{Ker} f$ est un fermé de E.*

Définition 12. *Si E est un K-e.v.n, $\mathcal{L}_c(E,K)$ est un sous-espace vectoriel de E^*. On l'appelle dual topologique de E.*

Développement 1 :

Théorème 13. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application. Alors f est lipschitzienne si et seulement si il existe $g\in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(y)-f(x)=\int_x^y g(t)\,dt.$$

1.3 Etude en dimension finie

Théorème 14. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 15. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.*

Corollaire 16. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Corollaire 17. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés.*

Exemple 18. La boule de centre la fonction nulle et de rayon 1 n'est pas compacte dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 19. L'application linéaire $f:P\mapsto P'$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sup_i |a_i|$.

Théorème 20. *(Riesz).*

Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte, si et seulement si il est localement compact.

1.4 Convexité dans un espace vectoriel normé

Définition 21. *Soit $A,B\in E$. On appelle segment d'extrémités A et B, et on note $[A,B]$ l'ensemble $\{\lambda A+(1-\lambda)B\ :\ \lambda\in[0,1]\}$. Un segment est fermé dans un espace vectoriel normé.*

Définition 22. *Soit $C\subset E$. On dit que C est convexe si pour tout $(A,B)\in C^2$, on a $[A,B]\subset C$.*

Exemple 23. Un sous-espace vectoriel est convexe.

Définition 24.

Soit $\mathcal{C}$ un ouvert connexe de E contenant zéro. On définit la jauge de $\mathcal{C}$ comme l'application

$$j_C:\begin{cases} E & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \inf\{\lambda>0\ :\ x\in\lambda\mathcal{C}\}\end{cases}.$$

Lemme 25. *La jauge de $\mathcal{C}$ est bien définie sur E. Elle vérifie les propriétés suivantes, pour x et y des vecteurs de E :*

1. *$\mathcal{C}=\{x\in E\ :\ j_C(x)<1\}$,*
2. *$\forall\mu>0\quad j_C(\mu x)=\mu\, j_C(x)$, ($j_C$ est positivement homogène)*
3. *$\exists M\geq 0,\ \forall x\in E\quad 0\leq j_C(x)\leq M\,\|x\|$,*
4. *$j_C(x+y)\ \leq\ j_C(x)+j_C(y)$. ($j_C$ est sous-additive)*

Développement 2 :

Théorème 26. *(Hahn-Banach, forme analytique)*

Soit $p:E\to\mathbb{R}$ positivement homogène et sous-additive. Soit G un sous-espace vectoriel de E et g une forme linéaire sur G telle que $g\leq p$.

Alors il existe une forme linéaire f sur E telle que $f_{|G}=g$ et $f\leq p$ sur E.

Corollaire 27. *Soit C un convexe ouvert de E non vide et $x_0\in E\setminus C$. Alors il existe un hyperplan affine H de E séparant $\{x_0\}$ et C.*

Corollaire 28. *(Hahn-Banach, forme géométrique)*

Soit A et B deux convexes de E disjoints et non vides. Si A est ouvert, il existe un hyperplan affine H qui sépare A et B.

2 Espaces de Banach

2.1 Définitions et propriétés

Définition 29. *On dit qu'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach s'il est complet.*

Théorème 30. *Un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente dans E.*

Théorème 31. *L'ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est un espace de Banach.*

Proposition 32. *Soit E un espace de Banach, et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.*

Définition 33. *On note $\mathrm{GL}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E inversibles continus tels que u^{-1} est continu.*

Proposition 34. *L'espace $\mathrm{GL}_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.*

2.2 Espaces L^p

On se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 35. *Pour $0 < p < \infty$ et f une fonction mesurable sur X à valeurs complexes, on définit :*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ est constitué des fonctions mesurables $f\colon X \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p < \infty$.

Pour $p = +\infty$ et f une fonction mesurable sur X à valeurs complexe, on définit :

$$\|f\|_\infty := \inf \{a \in \mathbb{R}_+ : \ \mu(\{|f| > a\} = 0)\}.$$

L'espace $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est constitué des fonctions mesurables $f\colon X \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_\infty < \infty$.

Remarque 36. Si μ est la mesure de comptage sur un espace dénombrable $(X, \mathcal{P}(X))$, on écrit souvent ℓ^p à la place de $\mathcal{L}^p$.

Proposition 37. *(Inégalité de Hölder)*

Pour $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Corollaire 38. *(Inégalité de Minkowski)*

Soit $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ avec $p \in [1, \infty]$, on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 39. *Soit $p \in [1, \infty]$. On définit l'espace $L^p(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$.*

On appelle encore f la classe de f dans $\mathcal{L}^p / \sim$.

Théorème 40. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Théorème 41. *(Riesz-Fischer). L'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.*

2.3 Théorème de Baire

Théorème 42. *(Baire).*

Soit (E, d) un espace métrique, $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E, l'ensemble $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est encore dense dans E.

Corollaire 43. *Un espace vectoriel admettant une base dénombrable n'est pas complet.*

Corollaire 44. *Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe telle que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(z) = 0.$$

Alors f est une fonction polynomiale.

Corollaire 45. *(Théorème de l'application ouverte).*

Soit E et F deux espaces de Banach, et $T\colon E \to F$ une application linéaire continue et surjective. Alors il existe $M > 0$ tel que $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0, M^{-1})$, i.e :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \text{tq} \quad y = T(x) \text{ et } \|x\| \leq M \cdot \|y\|.$$

Théorème 46. *(Théorème de Banach-Steinhauss).*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, avec E un espace de Banach. Soit $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des applications linéaires continues de $\mathcal{L}_c(E, F)$. On suppose que $\forall x \in E \quad \sup\limits_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$.

Alors $\sup\limits_{i \in I} |||T_i||| < \infty$.

Application 47. *Il existe des fonctions continues 2π-périodiques qui diffèrent de leur série de Fourier.*

3 Espaces de Hilbert

3.1 Généralités

Définition 48. *On appelle espace pré-hilbertien un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire. On munit alors $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$*

Définition 49. *Deux éléments x et y d'un espace pré-hilbertien E sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. Dans ce cas, on note $x \perp y$.*

L'orthogonal d'une partie A de E est, par définition, l'ensemble formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A. On la note $A^\perp$.

Remarque 50. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels fermés. On a de plus $(\overline{A})^\perp = A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$, et $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

Définition 51. *Un espace pré-hilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé espace de Hilbert.*

Dorénavant, on se donne $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

Théorème 52. (de projection sur un convexe fermé)
Soit Γ une partie fermée, convexe, non vide de H. Alors pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $y \in \Gamma$ tel que

$$\|x-y\| = \inf_{\gamma\in\Gamma} \|x-\gamma\| = d(x,\Gamma).$$

Ce point est appelé projection de x sur Γ et est noté $p_\Gamma(x)$. Il est caractérisé par la propriété suivante :

$$\begin{cases} p_\Gamma(x) \in \Gamma \\ \forall\gamma\in\Gamma \quad \mathfrak{Re}\langle x-p_\Gamma(x), \gamma-p_\Gamma(x)\rangle \leq 0 \end{cases}.$$

Application 53. Soit F un sous-espace vectoriel de H (non nécessairement fermé). Pour $x \in H$, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$$

Par ailleurs, on a l'égalité :

$$H = \bar{F} \oplus (\bar{F})^\perp = \bar{F} \oplus F^\perp.$$

On en déduit un critère de densité pour un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert :

$$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

3.2 Applications linéaires sur un espace de Hilbert

Théorème 54. (de représentation de *Riesz*).
Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Alors l'application δ définie par

$$\mathcal{L}\colon \begin{cases} H & \to & H' \\ a & \mapsto & \mathcal{L}_a = (x \mapsto \langle x, a\rangle) \end{cases}$$

est une bijection antilinéaire isométrique.

Remarque 55. Soit u un endomorphisme continu de H et $y \in H$. La forme linéaire $\langle u(\cdot), y\rangle$ est continue, donc d'après le théorème de représentation de RIESZ, il existe un unique $z \in H$ vérifiant

$$\forall x \in H \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, z\rangle.$$

Définition 56. *On appelle adjoint de l'endomorphisme continu $u \in \mathcal{L}(H)$ l'unique endomorphisme continu u^* de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant*

$$\forall (x,y) \in H^2 \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(x)\rangle.$$

Développement 3 :

Théorème 57. *(Radon-Nikodym).*
Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$. Il y a équivalence entre :

1. *$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0 \quad$ (on note $\nu \ll \lambda$).*
2. *$\exists f\colon (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ intégrable telle que $\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$.*

En outre, la fonction f est unique (à une égalité μ-presque partout près).
On note $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ et on dit que f est la dérivée de Radon-Nikodym, ou la densité de ν par rapport à μ.

3.3 Bases hilbertiennes

Définition 58. *On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de H est une base hilbertienne de H si elle est :*

1. *orthogonale : $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$,*
2. *normée : $\forall i \in I \quad \langle e_i, e_i\rangle = 1$,*
3. *totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(\{e_i :\ i \in I\})}$.*

Théorème 59. *H admet une base hilbertienne dénombrable.*

Exemple 60. Les suites $\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ définies par $\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}(m) = \delta_{n,m}$ forment une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Théorème 61. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.*
2. *Pour tout $x \in H$, $\quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle \cdot e_n$, i.e $\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle \right\| \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.*
3. *Pour tout $x \in H$, $\quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (égalité dite de PARSEVAL).*
4. *On a $\{e_n :\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.*

De plus, l'application $\mathcal{I}\colon \begin{cases} H & \mapsto & \ell^2(\mathbb{N}) \\ x & \mapsto & (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$ est une isométrie linéaire bijective.

Remarque 62. Quand l'espace H est de dimension infinie, ce développement n'est pas un développement selon une base algébrique.