

Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications

Devs :

- Prolongement de la fonction Gamma et formule d'Euler
- Densité des polynômes orthogonaux

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Gasquet-Witowski, Analyse de Fourier
3. Objectif Agrégation
4. Brianes-Pagès, Théorie de l'intégration

1 Prolongement des fonctions réelles

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Prolongement par continuité

Définition 1. Soit $a \in I$ et $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est prolongeable par continuité en a , et son prolongement est défini par :

$$\tilde{f}: \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \alpha & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

On identifie généralement f avec son prolongement $\tilde{f}$.

Exemple 2. La fonction $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en zéro.

1.2 Prolongement $\mathcal{C}^k$

Définition 3. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ en a si il existe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $g|_{I \setminus \{a\}} = f$.

Proposition 4. Soit $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$.

Si pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(i)}$ admet une limite finie ℓ_i en a , alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

Exemple 5. La fonction $f: x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^0$, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 6. La fonction définie par $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ admet un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ en zéro.

Proposition 7. Il existe une application $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $0 \leq \psi \leq 1$, $I_{]-\infty, 0]} = 0$, et $I_{[1, +\infty[} = 1$.

Corollaire 8. (fonctions plateau) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $K \subset \Omega$ un compact. Il existe une application $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ de support inclu dans Ω telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur un voisinage de K .

2 Prolongement par densité

Théorème 9. Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, où l'on suppose que (F, d') est complet. Soit $H \subset E$ une partie dense et $f: H \rightarrow F$ une application uniformément continue.

Alors f admet un unique prolongement continu à E , et de plus, ce prolongement est uniformément continu.

On donne trois applications de ce théorème :

2.1 Intégrale de Riemann

Exemple 10. Soit $a \leq b$ des réels. On note $\mathcal{E}(a, b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$. On définit sur $[a, b]$ l'intégrale de Riemann d'une fonction $f \in \mathcal{E}(a, b)$ par :

$$\mathcal{I}_{[a, b]}(f) := \int_a^b f(x) dx := \sum_{k=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$$

Où $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à f et c_i est la valeur de f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

L'application $f \mapsto \mathcal{I}_{[a, b]}(f)$ est uniformément continue de $\mathcal{E}(a, b)$ vers $\mathbb{R}$, et la densité de $\mathcal{E}(a, b)$ dans $\mathcal{C}_0([a, b], \mathbb{R})$ permet d'étendre l'intégrale de Riemann aux fonctions continues sur un segment.

2.2 Espérance conditionnelle

Définition 11. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On appelle *espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$* tout variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant :

i. Y est $\mathcal{G}$ -mesurable.

ii. $\forall A \in \mathcal{G} \quad \int_A Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$.

Théorème 12. L'espérance conditionnelle d'une variable $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existe et est unique.

Pour démontrer l'existence, on commence par le cas où $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et le cas L^1 s'obtient grâce au théorème de prolongement par densité.

2.3 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Définition 13. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f par :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx$$

Proposition 14. (Egalité de Plancherel-Parseval)

Soient f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x) dx$$

Et :

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$$

Théorème 15. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Ceci, avec la proposition précédente et le théorème de prolongement par densité, permet de définir un unique prolongement continu de l'application $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

3 Prolongements analytiques

3.1 Résultats généraux

Définition 16. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle *rayon de convergence* de la série $\sum a_n z^n$ le nombre :

$$R := \sup \{ r \geq 0 : \text{la suite } (|a_n| r^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée} \}$$

Proposition 17. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Théorème 18. (Théorème d'Abel angulaire)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n z^n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ et on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0 \quad \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

Alors on a $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 19. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$.

Exemple 20. La réciproque est fausse. On a :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$$

Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = +\infty$.

Proposition 21. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω . Alors f est développable en série entière sur tout point de Ω (on dit que f est analytique sur Ω).

Théorème 22. (Zéros isolés)

Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ non identiquement nulle, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f est constitué de points isolés, i.e si $z_0 \in \Omega$ est un zéro de f , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ et pour tout $z \in D(z_0, \varepsilon)$ on ait $f(z) \neq 0$.

Théorème 23. (Principe du prolongement analytique)

Soit Ω un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset \Omega$ qui a un point d'accumulation dans Ω , alors elles sont égales sur Ω .

On donne deux exemples liés à des prolongement de fonctions holomorphes :

3.2 Fonction Gamma d'Euler

Définition 24. Pour $x > 0$, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Développement 1 :

Théorème 25. La fonction Γ définie est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0 = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

Elle se prolonge en une unique fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z(z+1) \cdots (z+n)}{n^z \cdot n!}.$$

3.3 Polynômes orthogonaux

Définition 26. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids sur I une application $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrales sur I par rapport à la mesure dont la densité est ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 27. $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

Proposition 28. Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$, tels que $\deg(P_n) = n$. Elle s'appelle la famille de polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ .

Développement 2 :

Théorème 29. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids sur I . On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < \infty$$

Alors la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

4 Prolongement de mesures. Application : construction de la mesure de Lebesgue

Définition 30. Soit X un ensemble et $\mathcal{C}$ une famille de parties de X . On dit que $\mathcal{C}$ est une algèbre de Boole si :

1. $X \in \mathcal{C}$

2. $\forall A, B \in \mathcal{C} \quad A \cup B \in \mathcal{C} \quad (\text{stabilité par réunion finie})$

3. $\forall A \in \mathcal{C} \quad {}^c A \in \mathcal{C} \quad (\text{stabilité par complémentaire})$

Exemple 31. La classe $\mathcal{C}_I$ suivante définit une algèbre de Boole :

$$\mathcal{C}_I = \{I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n : n \geq 1 \text{ et } I_k \text{ intervalles de } \mathbb{R} \text{ deux à deux disjoints}\}$$

Théorème 32. (d'extension de Carathéodory) [ADMIS]

Soit $\mathcal{C}$ une algèbre de Boole sur X et une application $\mu: \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{additivité finie})$

3. $\forall (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}} \left(\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n, \quad \mu(A_1) < \infty, \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0 \right) \quad (\text{continuité de la mesure})$

4. Il existe une suite $(E_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $X = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$. (régularité extérieure)

Alors, il existe une unique mesure $\tilde{\mu}$ sur $\sigma(\mathcal{C})$ qui coïncide avec μ sur $\mathcal{C}$.

Définition 33. Soit X un ensemble. On dit que $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est une semi-algèbre si $\mathcal{S}$ vérifie :

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$

2. $\forall A, B \in \mathcal{S} \quad A \cap B \in \mathcal{S}$

3. $\forall A \in \mathcal{S} \quad \exists (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{S}^n \text{ deux à deux disjoints tels que } {}^c A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$

Exemple 34. La famille $\mathcal{S}_I = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$ est une semi-algèbre.

Proposition 35. Soit $\mathcal{S}$ une semi-algèbre. Alors :

1. $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathcal{S} \text{ deux à deux disjoints, } n \geq 1 \right\}$ est la plus petite algèbre de Boole contenant $\mathcal{S}$.

2. Soit $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et la propriété d'additivité finie suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{S} \quad A \cup B \in \mathcal{S} \text{ et } A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Alors μ admet un unique prolongement à $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ vérifiant la propriété d'additivité finie au sens (2) du théorème de Carathéodory.

Ces constructions permettent de définir la mesure de Lebesgue, de la manière suivante :

Théorème 36. *Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ , coïncidant avec la mesure long sur S_I . λ est appelée la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie :*

$$\lambda([0, 1]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \lambda = \lambda(\cdot + a)$$