P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications

Devs :

1. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.
2. Image de l'exponentielle.

Références :

1. Gourdon, Analyse.
2. Queffelec, Topologie.
3. Rudin, Analyse réelle et complexe.
4. Caldero-Germoni, H2G2.
5. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis.
6. L3 P6 : https://www.ljll.math.upmc.fr/abadiej/documents/3M260-2017/3M260-TD5.pdf, ou bien références personnelles (pas de livre).

1 Définitions et premières propriétés

On se donne (X,τ) et (Y,τ') deux espaces topologiques.

1.1 Espace topologique connexe

Définition 1. *On a équivalence entre*

i. Si $X=O_1\sqcup O_2$, avec O_1 et O_2 ouverts, alors $O_1=\varnothing$ ou $O_2=\varnothing$.

ii. Si $X=F_1\sqcup F_2$, avec F_1 et F_2 fermés, alors $F_1=\varnothing$ ou $F_2=\varnothing$.

iii. Si $A\subset X$ est ouvert et fermé, alors $A=\varnothing$ ou $A=X$.

iv. Toute application continue $\varphi\colon X\to\mathbb{Z}$ est constante.

Si X vérifie les propriétés ci-dessus, on dit que X est un espace connexe.

Exemple 2.

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

Proposition 3. *Soit A une partie de X munie de la topologie induite. Alors A est connexe si et seulement si pour tout ouvert O_1 et O_2 de X tels que $A\subset O_1\cup O_2$ et $A\cap O_1\cap O_2=\varnothing$, on a $A\cap O_1=\varnothing$ ou $A\cap O_2=\varnothing$.*

Exemple 4. Soit A une partie de X. Toute partie connexe C de X qui rencontre l'intérieur de A et l'extérieur de A (défini par $\mathrm{ext}(A):=\mathrm{int}(X\setminus A)$) rencontre aussi la frontière de A.

Théorème 5. *Soit $f\colon(X,\tau)\to(Y,\tau')$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Théorème 6. *Soit $f\colon(X,\tau)\to(Y,\tau')$ une application localement constante, c'est-à-dire que tout point $a\in X$ possède un voisinnage sur lequel f vaut $f(a)$. Si X est connexe, alors f est constante.*

Proposition 7. *Soit A une partie connexe de X. Si $B\subset X$ vérifie $A\subset B\subset\overline{A}$, alors B est connexe. En particulier, $\overline{A}$ est connexe.*

Remarque 8. L'intérieur de A n'est cependant pas nécessairement connexe. Par exemple, on peut considérer $A=Q_1\cup Q_2\cup\{(0,0)\}$, où Q_1 et Q_2 sont les quarts de plans stricts nord est et sud ouest.

Proposition 9.

- *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes de X et si $\bigcap_{i\in I}A_i=\varnothing$, alors $\bigcup_{i\in I}A_i$ est connexe.*
- *Si $A_1,\dots,A_n$ sont des connexes de X et vérifient $A_i\subset A_{i+1}$ pour tout $i\leq n-1$, alors $\bigcup_{i\in I}A_i$ est connexe.*

Remarque 10. En général, une union de connexes n'est pas connexes (prendre deux intervalles disjoints). Une intersection de connexes n'est pas non plus connexe (par exemple $\mathbb{S}^1$ et $\{\mathrm{Re}(z)=0\}$ sont connexes et d'intersection $\{-1,1\}$ qui est non connexe).

Proposition 11. *Soient $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$ des espaces topologiques connexes. Alors l'espace $(X_1\times\cdots\times X_n,\tau)$ où τ désigne la topologie produit, est encore connexe.*

Théorème 12. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Corollaire 13. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soit I un intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon I\to\mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 14. *(Théorème de Darboux)*
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.2 Connexité par arcs

Définition 15. *On appelle chemin de X une application $\gamma\colon[0,1]\to(X,\tau)$ continue et injective. L'image $\langle\gamma\rangle:=\gamma([0,1])$ de $[0,1]$ par γ s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc et $\gamma(1)$ son extrémité.*

Définition 16. *On dit qu'un espace topologique est connexe par arcs si pour tout $(x,y)\in X^2$, il existe un chemin γ d'origine x et d'extrémité y.*

Exemple 17.

- L'épigraphe d'une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, défini comme l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>f(x)\}$ est connexe par arcs.
- Un convexe (ou, plus faible, une partie étoilée) d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.
- La sphère unité $\mathbb{S}$ est connexe par arcs.

Théorème 18. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe. La réciproque est vraie si X est un ouvert d'un espace vectoriel normé.*

Remarque 19. Soit $E=\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0<x\leq 1\right\}$ et X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$. Alors X est connexe, mais pas connexe par arcs.

Développement 1 :

Exemple 20. Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}[A]$.

Corollaire 21. *L'exponentielle de matrices* $\exp\colon\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

1.3 Composantes connexes

Proposition 22. *La relation binaire $\sim$ définie sur X par $x\sim y$ si et seulement si il existe $C\subset X$ connexe tel que $x\in C$ et $y\in C$ est une relation d'équivalence.*

Définition 23. *Les classes d'équivalence de $\sim$ s'appellent les composantes connexes de X. La classe d'équivalence de $x\in X$ se note $C(x)$ et s'appelle la composante connexe de x.*

Proposition 24. *$C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x, c'est aussi le plus grand connexe contenant x.*

Proposition 25. *$C(x)$ est fermé dans X.*

Théorème 26. *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.*

En effet, si $\mathcal{V}=\{J(x) : x\in\mathcal{O}\}$ est l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{O}$, alors l'application $\mathcal{V}\to\mathbb{Q}$ qui associe à chaque $J\in\mathcal{V}$ un rationnel r contenu dans J (obtenu avec l'axiome du choix) est injective. On conclut grâce au théorème 11.

2 Applications de la notion de connexité

2.1 Notion d'indice et formule de Cauchy

Dans cette partie, on se donne Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 27. *Un chemin $\gamma\colon[0,1]\to\Omega$ est appelé un lacet lorsque $\gamma(0)=\gamma(1)$.*

Définition 28. *Soit γ un lacet sur Ω. Alors pour tout $z\in\Omega\setminus\langle\gamma\rangle$ on définit*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Proposition 29. *La fonction Ind_γ est à valeus entières sur $\Omega\setminus\langle\gamma\rangle$, constante sur chaque composante connexe de $\Omega\setminus\langle\gamma\rangle$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\langle\gamma\rangle$.*

Exemple 30. Si $\gamma=C(a,r)^+$ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r, alors

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\langle C(a,r)^+\rangle,\qquad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases}1 \text{ si } |z-a|<r\\ 0 \text{ si } |z-a|>r\end{cases}.$$

Théorème 31. *(Cauchy sur un ensemble convexe)*

On suppose ici que Ω est convexe. Soit γ un lacet sur Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Si $z\in\Omega$ et si $z\notin\langle\gamma\rangle$, alors on a

$$f(z)\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

2.2 Analycité et principe du maximum

On suppose ici que Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Théorème 32. *(Théorème des zéros isolés de Riemann)*

Soit f holomorphe non nulle sur Ω. Alors l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ des zéros de f est un ensemble discret, ce qui signifie que pour tout $a\in\mathcal{Z}(f)$, il existe $r>0$ tel que $\mathcal{Z}(f)\cap D(a,r)=\{a\}$.

Corollaire 33. *Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est non nulle, alors $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable et pour tout compact K de D, $\mathcal{Z}(f) \cap K$ est fini.*

Corollaire 34. *(Théorème du prolongement analytique)*
Si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω et si $f(z) = g(z)$ pour tout z dans un ensemble qui possède un point d'accumulation dans Ω, alors on a $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Application 35. La fonction Γ définie par $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0 = \{\mathrm{Re} > 0\}$.

Elle se prolonge en une unique fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, et $\dfrac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{\Gamma(z)} \;=\; \lim_{n \to +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z \cdot n!}.$$

Théorème 36. *(Principe du maximum de Riemann)*
Soit f une fonction holomorphe sur Ω et $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ avec $r > 0$. Alors

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si f est constante sur Ω.

Application 37. (Inégalité de Bernstein)
Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n. Alors

$$\sup_{|z| \leq 1} |P'(z)| \leq n \sup_{|z| \leq 1} |P(z)|.$$

2.3 Connexité des espaces de matrices

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul.

Théorème 38. *Les espaces $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.*

Théorème 39.

- *L'espace $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.*
- *Les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont*

$$G^+ = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(A) > 0\} \text{ et } G^- = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(A) < 0\}.$$

Théorème 40. *L'espace $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. L'espace $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arc homéomorphes.*

Développement 2 :

Lemme 41. *Soit $G \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe distingué et connexe par arcs, non réduit à $\{I_3\}$. Alors $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.*

Théorème 42. *L'ensemble $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe simple de $O_3(\mathbb{R})$.*

2.4 Une application géométrique

Définition 43. *Soit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un lacet vérifiant*

$$\forall (s_1, s_2) \in [a,b]^2 \quad \gamma(s_1) = \gamma(s_2) \implies s_1 = a \text{ et } s_2 = b$$

On dit alors que $\Gamma := \langle \gamma \rangle$ est une courbe fermée simple, paramétrée par le chemin γ.

Théorème 44. *(Jordan, admis)*
Le complémentaire d'une courbe fermée simple Γ dans $\mathbb{R}^2$ est formé d'exactement deux composantes connexes distinctes, l'une bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe Γ.

Application 45. (Inégalité isopérimétrique)
Soit Γ une courbe fermée simple sur $\mathbb{R}^2$ de longueur ℓ, et $\mathcal{A}$ l'aire de la région enfermée par Γ. Alors on a

$$\mathcal{A} \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.