

Leçon 203. Utilisation de la notion de compacité

Devs :

- Théorème de Cauchy-Lipschitz (local)
- Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
3. Quéffélec, Topologie
4. Ramis-Deschamps-Odoux, Topologie et éléments d'analyse
5. Rudin, Analyse réelle et complexe
6. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
7. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
8. Testard, Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite
9. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles

1 Généralités sur la compacité

1.1 Espaces topologiques compacts et localement compacts

Dans cette partie, on considère (X, τ) un espace topologique.

Théorème 1. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- De tout recouvrement de X par une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- De toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

Définition 2. L'espace topologique (X, τ) est dit compact si il vérifie les propositions équivalentes du théorème 1.

Théorème 3. (Des fermés emboîtés). On suppose que (X, τ) est compact. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Définition 4. Soit $A \subset X$. On dit que A est une partie compacte de X si le sous-espace topologique (A, τ_A) est compact (on rappelle que $\tau_A = \{O \cap A : O \in \tau\}$ désigne la topologie induite par A).

On suppose désormais que l'espace (X, τ) est séparé, c'est-à-dire que pour tout $x \neq y$ dans X , il existe $V_x, V_y \in \tau$ tels que $x \in V_x$, $y \in V_y$ et $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Théorème 5. Soit $A \subset X$. Alors A est compacte si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X tels que $A \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$, il existe une sous-famille finie $(F_{i_k})_{1 \leq k \leq n}$ telle que

$$A \cap \left(\bigcap_{i=1}^n F_{i_k} \right) = \emptyset.$$

Proposition 6. Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.

Théorème 7. On suppose que (X, τ) est compact. Alors une partie de X est compacte si et seulement si elle est fermée.

Définition 8. On dit que (X, τ) est localement compact si tout point de X admet un voisinage dont la fermeture est compacte.

Proposition 9. Soit X un espace séparé et K un sous-espace compact de X . Soit $p \in K^c$. Il existe des ouverts U et W tels que $p \in U$, $K \subset W$ et $U \cap W = \emptyset$.

Théorème 10. On suppose que X est localement compact. Soit U un ouvert de X et $K \subset U$ un compact. Il existe un ouvert V dont la fermeture est compact et qui vérifie $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

1.2 Espaces métriques compacts

Proposition 11. Un espace métrique compact est borné. Une partie compacte d'un espace métrique compact est bornée.

Lemme 12. Soit (X, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une valeur d'adhérence. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε .

Théorème 13. Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass :

- Toute suite d'éléments de (X, d) admet une valeur d'adhérence.

Théorème 14. Soit (X, d) un espace métrique compact, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X admettant une unique valeur d'adhérence $a \in X$. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

Proposition 15. Tout espace métrique compact est complet.

Proposition 16. (Espaces produit). Soit $(X_i, d_i)_{1 \leq i \leq p}$ des espaces métriques non vides. L'espace topologique produit X est compact si et seulement si chaque espace topologique X_i est compact.

Proposition 17. Les parties compactes de $\mathbb{R}^p$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^p$.

Corollaire 18. De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^p$, on peut extraire une sous-suite convergente.

Application 19. (Théorème d'Alembert-Gauss). Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1.3 Procédé d'extraction diagonale

Définition 20. Soit X un espace métrique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est relativement compacte s'il existe un compact K de X tel que $A \subset K$, ce qui revient à dire que l'adhérence de A dans X est compacte.

Théorème 21. Soit $(X_p, d_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $(x_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X_p . On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{x_{n,p} : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans X_p .

Alors il existe une fonction strictement croissante $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{\phi(n),p})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans X_p .

Corollaire 22. (Théorème de Tychonoff dénombrable). Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts et soit $X = \prod_{p \in \mathbb{N}} X_p$ muni de la distance produit. Alors X est compact.

2 Fonction continue sur un compact

2.1 Fonctions numériques continues sur un compact

Théorème 23. Soit (X, τ) un espace topologique compact et $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Application 24. Soit (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques, X étant compact et Y séparé. Toute application bijective et continue de X dans Y est un homéomorphisme.

Application 25. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Exemple 26. Toute fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Proposition 27. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f admet un extremum relatif en $c \in \text{Int}(I)$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.

Théorème 28. (de Rolle)

Soit $f \in [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 29. (des accroissements finis)

Soit $f \in [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Corollaire 30. Une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Elle est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Théorème 31. (Premier théorème de Dini). Soit X un espace compact et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur X à valeurs réelles. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers f . Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Théorème 32. (Lemme d'Urysohn)

Soit (X, τ) un espace topologique séparé et localement compact.

Soit V un ouvert de X , et $K \subset V$ un compact. Il existe f une fonction continue à support compact sur X telle que :

- $\forall x \in X \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$
- $\forall x \in K \quad f(x) = 1.$
- $\text{Supp}(f) \subset V.$

Théorème 33. (Théorème de représentation de Riesz-Markov-Kakutani, admis).

Soit (X, τ) un espace topologique séparé et localement compact. Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$. Il existe une tribu $\mathcal{M}$ sur X qui contient $\mathcal{B}(X)$ et il existe une unique mesure positive μ sur $\mathcal{M}$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X) \quad \Lambda(f) = \int_X f d\mu.$$

Corollaire 34. (Existence de la mesure de Lebesgue, admis).

Il existe une unique mesure complète et régulière λ sur une tribu $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}$, appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, invariante par translation, telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

2.2 Fonctions uniformément continues sur un compact

Définition 35. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques. On dit que $f: X \rightarrow Y$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Exemple 36. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $I = [0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 37. (Heine)

Soit (X, d) un espace métrique compact et (Y, d') un espace métrique. Alors toute application continue $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ est uniformément continue.

Exemple 38. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Application 39. On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un « bon noyau » lorsqu'elle vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1, \mathcal{C}_0^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx = 0$.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un bon noyau et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Pour tout point de continuité x de f , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors la limite est uniforme.

Corollaire 40. (Théorème de Féjer). Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$, et $S_N(f)(t) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$ la somme partielle de sa série de Fourier. Alors $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f .

2.3 Théorèmes de points fixes

Définition 41. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une application $f: X \rightarrow X$ est contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) < k \cdot d(x, y)$.

Théorème 42. (Point fixe de Banach-Picard)

Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f: X \rightarrow X$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe $x \in X$. De plus, toute suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x .

Corollaire 43. (Théorème du point fixe généralisé)

Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f: X \rightarrow X$ une application. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ soit contractante. Alors f admet un unique point fixe.

Développement 1 :

Théorème 44. (Théorème de Cauchy-Lipschitz local).

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable.

Si $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ sont fixés, alors le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Théorème 45. (Point fixe de Brouwer). Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Toute application continue $f: B \rightarrow B$ admet un point fixe.

3 Compacité en dimension infinie

3.1 Parties compactes de $C(X)$ et de L^p

Théorème 46. (de compacité de Riesz). La boule fermée d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si la dimension de cet espace est finie.

Exemple 47. La boule fermée de centre la fonction nulle et de rayon 1 n'est pas compacte dans $(\mathcal{C}^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty))$.

Proposition 48. L'espace $C^{\mathbb{K}}(X)$ ou $C(X)$ des fonctions continues de X sur $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative unitaire, totalement ordonnée par la relation $\leq$ définie par $f \leq g \iff \forall x \in X \quad f(x) \leq g(x)$.

Définition 49. On munit $C(X)$ de la norme uniforme sur X , notée $\|\cdot\|$, définie par $\|f\| := \max_{x \in X} |f(x)|$, qui définit la topologie de la convergence uniforme.

Définition 50. Soit $x_0 \in X$. On dit qu'une partie $A \subset C(X)$ est équicontinue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in K \quad \forall a \in A \quad d(x_0, y) \leq \delta \implies d'(a(x_0), a(y)) \leq \varepsilon.$$

Définition 51. On dit qu'une partie $A \subset C(X)$ est uniformément équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in K \quad \forall a \in A \quad d(x, y) \leq \delta \implies d'(a(x), a(y)) \leq \varepsilon.$$

Proposition 52. Une partie de $C(X)$ est équicontinue en un point si et seulement si elle est uniformément équicontinue.

Remarque 53. Le fait que ces notions coïncident est dû à la compacité de X .

Exemple 54. Toute partie finie de $C(X)$ est équicontinue.

Exemple 55. Si $C > 0$, l'ensemble des fonctions C -lipschitziennes de X dans $\mathbb{K}$ est équicontinu.

Proposition 56. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite équicontinue de $C(X)$ et D une partie dense de X . Si la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in D$ alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f \in C(X)$.

Théorème 57. (Ascoli). Une partie A de $C(X)$ est relativement compacte dans $C(X)$ si et seulement si elle est équicontinue et ponctuellement relativement compacte, c'est-à-dire si l'ensemble $\{a(x) : a \in A\}$ est compact.

Remarque 58. Pour que A soit ponctuellement relativement compacte, il suffit que A soit bornée.

Développement 2 :

Application 59. (Théorème du point fixe de Markov-Kakutani).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension $N \in \mathbb{N}^*$, et G un sous-groupe compact de $\text{GL}(E)$.

On se donne K une partie convexe compacte de E et on suppose que K est stable par tous les éléments de G . Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, on ait $g(x) = x$. Autrement dit, G possède un point fixe dans K .

Théorème 60. (Riesz-Fréchet-Kolmogorov, admis).

Soit $p \in [1, +\infty[$ et $A \subset L^p$. Alors A est relativement compacte dans L^p si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- A est bornée dans L^p .
- $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{|x| > R\}} |f(x)|^p dx = 0$, uniformément par rapport à $f \in A$.
- $\lim_{a \rightarrow 0} \tau_a f = f$ dans L^p , uniformément par rapport à $f \in A$, où $\tau_a f(x) := f(x - a)$.

3.2 Parties denses de $C(X)$

Lemme 61. On suppose que X contient au moins deux éléments. Soit $A \subset C^{\mathbb{R}}(X)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\forall a, b \in A \quad \sup(a, b) \in A$ et $\inf(a, b) \in A$.
- Si $x, y \in X$ sont distincts et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $a \in A$ tel que $a(x) = \alpha_1$ et $a(y) = \alpha_2$.

Alors A est dense dans $C(X)$.

Définition 62. Une partie A de $C(X)$ est dite séparante si pour tout point (x, y) distincts de X , il existe $a \in A$ tel que $a(x) \neq a(y)$. Elle est dite réticulée si pour tout $(a, b) \in A$, les fonctions $\sup(a, b)$ et $\inf(a, b)$ sont des éléments de A .

Théorème 63. Si $A \subset C^{\mathbb{R}}(X)$ est réticulé, séparant, et contient les fonctions constantes, alors A est dense dans $C(X)$.

Exemple 64. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.

Théorème 65. (Stone-Weierstrass, cas réel). Toute sous-algèbre de $C^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.

Exemple 66. L'ensemble des fonctions polynomiales sur X (de la forme $x \mapsto P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$) est dense dans $C(X)$.

Définition 67. On dit qu'une partie $A \subset C^{\mathbb{C}}(X)$ est auto-conjuguée si pour tout $a \in A$, $\bar{a} \in A$.

Théorème 68. (Stone-Weierstrass, cas complexe). Toute sous-algèbre A de $C^{\mathbb{C}}(X)$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{C}}(X)$.

Théorème 69. (Stone-Weierstrass trigonométrique). L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $C_0^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.