P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème de Riesz-Fischer
- Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Hirsch-Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle
3. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
4. Rudin, Analyse réelle et complexe
5. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles
6. Testard, Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite
7. Brianes-Pages, Théorie de l'intégration

1 Espaces de fonctions continues et topologie

On se donne $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un espace métrique compact non vide (X,d).

1.1 Fonctions continues sur un compact

Proposition 1. *L'espace $C^{\mathbb{K}}(X)$ ou $C(X)$ des fonctions continues de X sur $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative unitaire, totalement ordonnée par la relation $\leq$ définie par $f\leq g \Longleftrightarrow \forall x\in X \quad f\leq g$.*

Définition 2. *On munit $C(X)$ de la norme uniforme sur X, notée $\|\cdot\|$, définie par $\|f\|:=\max_{x\in X}|f(x)|$, qui définit la topologie de la convergence uniforme.*

Proposition 3. *La norme uniforme est une norme d'algèbre, i.e $\|fg\|\leq\|f\|\cdot\|g\|$ pour $f,g\in C(X)$.*

Théorème 4. *L'espace $C(X)$ est un espace de Banach séparable.*

Théorème 5. *(Théorèmes de Dini)*

- *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur I.*
- *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et croissantes qui converge simplement vers f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur I.*

1.2 Parties compactes

Définition 6. *Soit $x_0\in X$. On dit qu'une partie $A\subset C(X)$ est équicontinue en x_0 si*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall y\in K\quad\forall a\in A\quad d(x_0,y)\leq\delta\Longrightarrow d'(a(x_0),a(y))\leq\varepsilon.$$

Définition 7. *On dit qu'une partie $A\subset C(X)$ est uniformément équicontinue si*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x,y\in K\quad\forall a\in A\quad d(x,y)\leq\delta\Longrightarrow d'(a(x),a(y))\leq\varepsilon.$$

Proposition 8. *Une partie de $C(X)$ est équicontinue en un point si et seulement si elle est uniformément équicontinue.*

Remarque 9. Le fait que ces notions coïncident est dû à la compacité de X.

Exemple 10. Toute partie finie de $C(X)$ est équicontinue.

Exemple 11. Si $C>0$, l'ensemble des fonctions C-lipschitziennes de X dans $\mathbb{K}$ est équicontinu.

Proposition 12. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue de $C(X)$ et D une partie dense de X. Si la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x\in D$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f\in C(X)$.*

Théorème 13. *(Ascoli). Une partie A de $C(X)$ est relativement compacte dans $C(X)$ si et seulement si elle est équicontinue et ponctuellement relativement compacte, c'est-à-dire si l'ensemble $\{a(x)\;:\;a\in A\}$ est compact.*

Remarque 14. Pour que A soit ponctuellement relativement compacte, il suffit que A soit bornée.

Application 15. *(Théorème de Cauchy-Arzela-Peano).*
Si $f\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ est continue, alors le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$:$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ admet une solution maximale, non nécessairement unique. La preuve de ce résultat repose sur le théorème d'Ascoli.

Développement 1 :

Application 16. *(Théorème du point fixe de Markov-Kakutani).*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension $N \in \mathbb{N}^*$, et G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$.

On se donne K une partie convexe compacte de E et on suppose que K est stable par tous les éléments de G. Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, on ait $g(x) = x$. Autrement dit, G possède un point fixe dans K.

1.3 Parties denses

Lemme 17. *On suppose que X contient au moins deux éléments. Soit $A \subset C^{\mathbb{R}}(X)$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $\forall a, b \in A \quad \sup(a, b) \in A$ *et* $\inf(a, b) \in A$.
- *Si $x, y \in X$ sont distincts et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $a \in A$ tel que $a(x_1) = \alpha_1$ et $a(x_2) = \alpha_2$.*

Alors A est dense dans $C(X)$.

Définition 18. *Une partie A de $C(X)$ est dite séparante si pour tout point (x, y) distincts de X, il existe $a \in A$ tel que $a(x) \neq a(y)$. Elle est dite réticulée si pour tout $(a, b) \in A$, les fonctions $\sup(a, b)$ et $\inf(a, b)$ sont des éléments de A.*

Théorème 19. *Si $A \subset C^{\mathbb{R}}(X)$ est réticulé, séparant, et contient les fonctions constantes, alors A est dense dans $C(X)$.*

Exemple 20. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.

Théorème 21. *(Stone-Weierstrass, cas réel). Toute sous-algèbre de $C^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.*

Exemple 22. L'ensemble des fonctions polynomiales sur X (de la forme $x \mapsto P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$) est dense dans $C(X)$.

Définition 23. *On dit qu'une partie $A \subset C^{\mathbb{C}}(X)$ est auto-conjuguée si pour tout $a \in A$, $\bar{a} \in A$.*

Théorème 24. *(Stone-Weierstrass, cas complexe). Toute sous-algèbre A de $C^{\mathbb{C}}(X)$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{C}}(X)$.*

Théorème 25. *(Stone-Weierstrass trigonométrique). L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}_0^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

2 Espaces de Lebesgue

2.1 Espaces L^p, construction

Définition 26. *Pour $0 < p < \infty$ et f une fonction mesurable sur X à valeurs complexes, on définit :*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ est constitué des fonctions mesurables $f: X \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p < \infty$.

Pour $p = +\infty$ et f une fonction mesurable sur X à valeurs complexe, on définit :

$$\|f\|_\infty := \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \ \mu(\{|f| > a\} = 0)\}.$$

L'espace $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est constitué des fonctions mesurables $f: X \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_\infty < \infty$.

Remarque 27. Si μ est la mesure de comptage sur un espace dénombrable $(X, \mathcal{P}(X))$, on écrit souvent ℓ^p à la place de $\mathcal{L}^p$.

Proposition 28. *(Inégalité de Hölder)*

Pour $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Corollaire 29. *Si μ est finie (par exemple si μ est une probabilité), on a :*

$$\forall p \geq q \quad \mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^q(\mu).$$

Corollaire 30. *(Inégalité de Minkowski)*

Soit $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ avec $p \in [1, \infty]$, on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 31. *Soit $p \in [1, \infty]$. On définit l'espace $L^p(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$.*

On appelle encore f la classe de f dans $\mathcal{L}^p/\sim$.

Théorème 32. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Développement 2 :

Théorème 33. *(Riesz-Fischer)*

L'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

2.2 Parties denses et compactes des L^p

Théorème 34. *(Admis)*

L'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

Définition 35. *Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Proposition 36. *L'application $*$ est bien définie sur $L^p \times L^q$. C'est une forme bilinéaire symétrique, et elle vérifie de plus*

$$\forall (f,g) \in L^p \times L^q \qquad \mathrm{Supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)}.$$

Proposition 37. *Pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, la fonction $f * g$ est uniformément continue, bornée et vérifie*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Définition 38. *On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{R}^d$ est une approximation de l'unité lorsqu'elle vérifie :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x)\, dx = 1$,
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |K_n(x)|\, dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\delta \leq |x| < +\infty} |K_n(x)|\, dx = 0$.

Exemple 39. Soit $\varphi \in L^1$ d'intégrale 1. La suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ définie par $\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx)$ est une approximation de l'unité.

Proposition 40. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Si $f \in L^p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \phi_n \in L^p$ et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f * \phi_n - f\|_p = 0.$$

Application 41. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 42. *(Riesz-Fréchet-Kolmogorov, admis).*
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $A \subset L^p$. Alors A est relativement compacte dans L^p si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- *A est bornée dans L^p.*
- *$\lim_{R\to+\infty} \int_{\{|x|>R\}} |f(x)|^p\, dx = 0$, uniformément par rapport à $f \in A$.*
- *$\lim_{a\to 0} \tau_a f = f$ dans L^p, uniformément par rapport à $f \in A$, où $\tau_a f(x) := f(x-a)$.*

2.3 Cas des espaces L^2

Théorème 43. *(De projection sur un convexe fermé).*
Soit Γ une partie fermée, convexe, non vide de L^2. Alors pour toute fonction $f \in L^2$, il existe une unique fonction $g \in \Gamma$ tel que

$$\|f - g\| = \inf_{\gamma\in\Gamma} \|f - \gamma\| = d(f, \Gamma).$$

Cette fonction est appelée projection de f sur Γ et est noté $p_\Gamma(g)$. Elle est caractérisée par la propriété suivante :

$$\begin{cases} p_\Gamma(f) \in \Gamma \\ \forall \gamma \in \Gamma \quad \mathfrak{Re}\langle f - p_\Gamma(f), \gamma - p_\Gamma(f)\rangle \leq 0 \end{cases}.$$

Théorème 44. *(De représentation de Riesz).*
L'application δ définie par

$$\mathcal{L}\colon \begin{cases} L^2 & \to & L^2 \\ a & \mapsto & \mathcal{L}_a = (x \mapsto \langle x, a\rangle) \end{cases}$$

est une bijection antilinéaire isométrique.

Application 45. *(Théorème de Radon-Nikodym).*
Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$. Il y a équivalence entre :

1. *$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0 \quad$ (on note $\nu \ll \lambda$).*
2. *$\exists f\colon (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ intégrable telle que $\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$.*

En outre, la fonction f est unique (à une égalité μ-presque partout près).
On note $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ et on dit que f est la dérivée de Radon-Nikodym, ou la densité de ν par rapport à μ.

3 Quelques espaces de fonctions particuliers

3.1 Espace de Schwarz

Définition 46. *On appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$ l'espace*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,:\, \forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \, |f^{(\ell)}(x)| < \infty \right\}.$$

Exemple 47. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 48. *On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx.$$

On utilise la notation $f(x) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ pour signifier que $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Proposition 49. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On a*

- $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi h \xi}$,
- $f(x)\, e^{-2i\pi x h} \rightarrow \hat{f}(\xi + h)$,
- $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1} \xi)$.
- $f'(x) \rightarrow 2i\pi\, \hat{f}(\xi)$,
- $-2i\pi x f(x) \rightarrow \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$.

Proposition 50. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Exemple 51. Si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Théorème 52. *(Formule d'inversion de Fourier)*
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x \xi}\, d\xi.$$

En particulier, $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ est une bijection sur l'espace de Schwartz.

3.2 Espace des fonctions holomorphes

Dans cette partie, on se donne Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 53. *Un chemin $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ est appelé un lacet lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 54. *Soit γ un lacet sur Ω. Alors pour tout $z \in \Omega \backslash \langle \gamma \rangle$ on définit*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposition 55. *La fonction Ind_γ est à valeus entières sur $\Omega \backslash \langle \gamma \rangle$, constante sur chaque composante connexe de $\Omega \backslash \langle \gamma \rangle$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\langle \gamma \rangle$.*

Exemple 56. Si $\gamma = C(a,r)^+$ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r, alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \langle C(a,r)^+ \rangle, \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z-a| < r \\ 0 \text{ si } |z-a| > r \end{cases}.$$

Théorème 57. *(Cauchy sur un ensemble convexe)*
On suppose ici que Ω est convexe. Soit γ un lacet sur Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin \langle \gamma \rangle$, alors on a

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Corollaire 58. *Une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable, avec*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, d\zeta$$

On suppose désormais que Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Théorème 59. *(Théorème des zéros isolés de Riemann)*
Soit f holomorphe non nulle sur Ω. Alors l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ des zéros de f est un ensemble discret, ce qui signifie que pour tout $a \in \mathcal{Z}(f)$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{Z}(f) \cap D(a, r) = \{a\}$.

Corollaire 60. *Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est non nulle, alors $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable et pour tout compact K de D, $\mathcal{Z}(f) \cap K$ est fini.*

Corollaire 61. *(Théorème du prolongement analytique)*
Si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω et si $f(z) = g(z)$ pour tout z dans un ensemble qui possède un point d'accumulation dans Ω, alors on a $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Théorème 62. *(Principe du maximum de Riemann)*
Soit f une fonction holomorphe sur Ω et $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ avec $r > 0$. Alors

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + r e^{i\theta})|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si f est constante sur Ω.