

Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. E & A

- Développement 1 : Théorème d'Abel et application
- Développement 2 : Théorème de Bernstein

1 Convergence et opérations

1.1 Rayon et disque de convergence

Définition 1 (Série entière). On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où

$z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Lemme 2 (d'Abel). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. S'il existe $r_0 > 0$ tel que $(a_n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $D(0, r)$ avec $r < r_0$, et converge absolument sur $D(0, |z_0|)$.

Définition 3 (Rayon/disque de convergence). On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, le nombre réel R défini par : $R = \sup \{r \geq 0; (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. L'ensemble $D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de la série.

Conséquence 4. D'après le lemme d'Abel une série entière converge normalement sur les compacts du disque ouvert $D(0, R)$ et diverge pour tout z vérifiant $|z| > R$.

Exemple 5. Sur le cercle de convergence il n'y pas toujours convergence de la série, c'est au cas par cas comme le montrent la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$.

1.2 Détermination du rayon de convergence

Proposition 6. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence.

1. Critère de d'Alembert : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$ (où l'on convient : $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$),
2. Critère de Cauchy : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$.
3. Critère d'Hadamard : on a

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Remarque 7. 1. Si le critère de D'Alembert s'applique alors le critère de Cauchy s'applique, mais la réciproque est fausse !

2. La formule de Hadamard s'applique toujours mais n'est pas toujours facile à manipuler.

Exemple 8. La série $\sum (3 + (-1)^n)^n z^n$ ne relève pas des critères de Cauchy et d'Alembert, mais seulement d'Hadamard.

Méthode 9 (Comparaison). Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayon de convergence R_1 et R_2 respectivement.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_1 \geq R_2$.
2. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_1 \geq R_2$
3. Si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ alors $R_1 = R_2$.

1.3 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R_1, R_2 > 0$ et de somme f et g sur leur disque de convergence respectif D_1, D_2 .

Proposition 10 (Sommes de séries entières). La série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est appelée somme des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R vérifie $R \geq \inf(R_1, R_2)$, et sur $D := D_1 \cap D_2$ sa somme est $f + g$.

Exemple 11. Les séries $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de rayon de convergence 1 mais celui de la somme est infini

Proposition 12 (Produit de Cauchy). La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ est appelée produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R vérifie $R \geq \inf(R_1, R_2)$, et sur $D := D_1 \cap D_2$ sa somme est fg .

Exemple 13. Soient $u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 2^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ et

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Les séries $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ sont de rayons de convergence $\frac{1}{2}$ et 1, alors que celui de leur produit de Cauchy est infini.

2 Propriétés de la somme

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f sur $D(0, R)$.

2.1 Régularité

Continuité dérivabilité

Théorème 14 (Continuité). *L'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque de convergence.*

Théorème 15 (Dérivabilité). *L'application $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $] -R, R[$. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ est R , et on a :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Théorème 16 (C^∞ é). *f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence R , et :*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

Remarque 17. *On a alors pour tout k , $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, et donc f coïncide avec sa série de Taylor.*

Primitive de la somme

Proposition 18. *Pour tout $x \in] -R, R[$, on a :*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exemple 19. *On utilise cette proposition pour montrer que :*

1. $\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, si $x \in] -1, 1[$.
2. $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, si $x \in] -1, 1[$.

Analyticité

Définition 20. *Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (où $\Omega \subset \mathbb{C}$) est dite analytique sur Ω , si pour tout $a \in \Omega$ il existe un disque $\Delta : |z-a| < r$ contenu dans Ω tel que pour tout $z \in \Delta$ on a :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n$$

Théorème 21. *f est analytique sur $D(0, R)$. Et pour tout $a \in D(0, R)$ tel que $|z-a| < R - |a|$ on a :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

2.2 Prolongement sur le cercle

- Exemple 22.**
1. *La série $\sum z^n$ ne converge en aucun point de son disque de convergence.*
 2. *La série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge sur tout son disque de convergence.*
 3. *La série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.*

Théorème 23 (D'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r \geq 1$, de somme f sur Δ_0 et telle que $\sum a_n$ converge vers une limite S . Pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on pose :*

$\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, z = 1 - \rho e^{i\theta}, \rho > 0, |\theta| \leq \theta_0\}$
Alors :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_0}} f(z) = S$$

Application 24. *On a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \frac{i}{2}(\theta - \pi)$$

Application 25. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, et soit $\sum c_n$ leur produit de Cauchy. Alors, si la série $\sum c_n$ converge on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Théorème 26 (Taubérien faible). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, de somme f et telle qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z < 1}} f(z) = S.$$

Alors si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum a_n$ converge et sa somme est S .

Remarque 27. *Le théorème taubérien faible est une réciproque partielle du théorème d'Abel. Une réciproque plus forte existe si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Contre-exemple 28. *On a :*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

mais la série $\sum (-1)^n$ diverge.

2.3 Zéros isolés

Théorème 29 (Zéros isolés). *S'il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ telle que les z_p soit 2 à 2 distincts, de limite nulle et telle que $f(z_p) = 0$ pour tout p , alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, $f = 0$.*

Conséquence 30. *Si les sommes de deux séries entières coïncident sur un voisinage de 0, elle coïncident sur $\mathbb{R}$.*

3 Développement en série entière

3.1 Fonction développable en série entière

Définition 31. Soit $R > 0$ et f une fonction à valeurs réelles définies sur $] - R, R[$. On dit que f est développable en série entière en 0 sur $] - R, R[$ s'il existe une suite de réels (a_n) telle que pour tout $x \in] - R, R[$, on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Théorème 32 (CNS). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de zéro, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe $R > 0$ tel que la suite*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}}{k!} x^k$$

converge simplement vers 0 sur $] - R, R[$.

Dans ce cas f coïncide avec sa série de Taylor sur $] - R, R[$ et son rayon de convergence est au moins égal à R .

Toutes les fonction $\mathcal{C}^\infty$ ne coïncident pas avec leur série de Taylor comme le montre l'exemple :

Contre-exemple 33. $z \mapsto e^{-\frac{1}{z^2}}$ a une série de Taylor nulle car ses coefficients de Taylor en zéro sont nuls, mais elle n'est pas la fonction nulle.

Proposition 34. Soient $R > 0$ et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R, R[$. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in] - R, R[$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|f^{(n)}(x)| \leq M$, alors f est développable en série entière sur $] - R, R[$.

Application 35 (Théorème de Bernstein). Soit $a > 0$, et f une fonction réelle et $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - a, a[$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] - a, a[$, $f^{(2k)} \geq 0$, alors f est développable en série entière sur $] - a, a[$.

Exemple 36. Le théorème de Bernstein s'applique à la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

3.2 Développement des fonctions usuelles

Proposition 37 (Développement des fractions rationnelles). Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, on a :

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(z - z_0)^p} = \frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{n-p+1} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

Exemple 38. Les théorèmes de la partie précédente permettent de montrer que :

$$1. \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$2. e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3.3 Exponentielle complexe

Définition 39. On appelle exponentielle complexe, notée $\exp$, la somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini.

Proposition 40. A les propriétés de la fonction exponentielle classique pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$:

1. $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$
2. $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$
3. $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$
4. $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$
5. $|\exp(z)| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$

3.4 Equations différentielles

Bibliographie

- XAVIER GOURDON : Les maths en tête.
- OLIVER RODOT : Analyse MP
- H.M. QUEFFÉLEC : Analyse complexe