Leçon 207 : Prolongement de fonctions. E & A.

— **Développement 1** : **Théorème de Plancherel**
— **Développement 2** : **Prolongement de la fonction Gamma**

(E,d) et (F,δ) désignent deux espaces métriques et $D \subset E$.

Définition 1 (Prolongement). *On dit que $g : E \longrightarrow F$ est un* ***prolongement*** *de $f : D \longrightarrow F$ si $g_{|D} = f$.*

1 Prolongement et continuité

Prolongement ponctuel

Définition 2 (Limite en un point). *Soient $A \subset D$ et $f : D \subset E \longrightarrow F$ une application. On dit que $l \in F$ est* ***la limite*** *de f en $a \in \bar{A}$ et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$, si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, d(x,a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), l) < \epsilon.$$

Définition 3. *Soit $f : D \longrightarrow F$ une application continue et $a \in E \setminus D$. Si f admet une limite l en a on dit que l'application continue*

$$g := \begin{cases} f(x) & si\ x \in D \\ l & si\ x \in E \setminus D \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f.

Exemple 4.
1. *Pour tout $x \neq 0$, $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolongement par continuité en 0 car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.*
2. *Pour tout $x \neq 0$, $x \longmapsto \exp(-\dfrac{1}{x^2})$ se prolonge par continuité en 0 car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \exp(-\dfrac{1}{x^2}) = 0$*

Contre-exemple 5. *La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ne se prolonge pas par continuité en 0.*

Prolongement par densité

Dans cette partie on suppose que D est une partie dense de E.

Proposition 6. *Soit $f : (D,d) \longrightarrow (F,\delta)$ une application continue telle que pour tout $x \in E \setminus D$, $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$ existe.*
Alors f se prolonge d'une unique façon à E en une application continue.

Proposition 7. *On suppose F complet.*
Soit $f : (A,d) \longrightarrow (F,\delta)$ une application uniformément continue. Alors f se prolonge de façon unique à E en une application uniformément continue.

Corollaire 8. *Si E et F sont des espaces vectoriels normés avec F de Banach, D un sous-espace vectoriel dense dans E, et $f : D \longrightarrow F$ une application linéaire continue, alors f se prolonge d'une unique façon à E, et on a conservation de la norme.*

Application 9. *Soit E un espace de Banach et $[a,b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann définit sur les fonctions en escaliers, se prolonge d'une unique façon à l'espace $\mathcal{R}([a,b],E)$ des fonctions réglées.*

Application 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in C^0_0(\mathbb{R})$, c'est à dire : $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = 0$*

Application 11 (Différentielle du déterminant). *L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est différentiable, et pour tout $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

$$D_x \det \circ H = tr({}^t Com(XH)).$$

La partie suivante et un exemple fondamental de prolongement par densité.

Transformée de Fourier

Définition 12. *Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est dite à décroissante rapide si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $|x|^k |f(x)| \leqslant C_k$.*

Définition 13 (**Espace de Schwartz**). *On définit l'espace de Schwartz*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha f^{(\beta)}(x) \right| < \infty \right\}$$

C'est l'espace des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Proposition 14. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Proposition 15. *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par la transformée de Fourier .*

Théorème 16 (Plancherel). **DÉVELOPPEMENT 1**
La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ (à une constante près) et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Prolongement global

Théorème 17 (Tietze-Urysohn). *Soit Y un fermé de (E,d) et $f : Y \longmapsto \mathbb{R}$ une application continue. Alors f admet un prolongement continue à (X,d).*

Application 18. *Soit $K \subset E$. Alors K est compact si et seulement si tout fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ est bornée.*

Application 19. *Supposons que E soit sans point isolé et que toute application de E dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue. Alors E est compact.*

Prolongement des formes linéaires

Théorème 20 (Hahn-Banach, ADMIS). *Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel, et $f \in D'$. Alors f se prolonge en une forme linéaire (non unique) continue ϕ sur E, et de plus on a :*

$$\|f\|_{D'} = \|\phi\|_{E'}.$$

Corollaire 21. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et V un sous espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est dense dans E*
2. *pour tout $\varphi \in E'$ on a $\varphi_{|V} = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$.*

Exemple 22. *Considérons $E = \mathcal{C}([0,1])$. Soit $A \subset]1,+\infty[$ une partie fermée et $f_a = \frac{1}{x-a}$ pour tout $a \in A$. Alors si A admet un point d'accumulation dans $]1,+\infty[$, $vect(f_a)_{a\in A}$ est dense dans E.*

2 Prolongement et différentiabilité

E désigne est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Proposition 23. *Soit $f : [a,b[\longrightarrow E$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f'(x)$ existe. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

Exemple 24. *La fonction $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge en 0 en une fonction C^∞*

Théorème 25 (De réalisation de Borel). *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)} = a_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 26. *Toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un compact $[a,b]$ (avec des dérivées de tout ordre à droite de a et à gauche de b) se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Solutions d'un problème de Cauchy

$I \subset \mathbb{R}$ désigne un intervalle, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert ($n \geqslant 1$), et $f : i \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition 27 (Problème de Cauchy). *On appelle problème de Cauchy la recherche d'une solution y de classe C^1 sur $J \subset I$ de l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Définition 28 (Solution maximale). *Soient y_1, y_2 deux solutions de (1) sur $J_1, J_2 \subset I$. On dit que y_2 prolonge y_1 si $J_1 \subset J_2$ et si $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1$.*
*Ainsi, une solution est dite **maximale** si elle n'admet aucun prolongement.*

Théorème 29 (Existence solution maximale). *Soit f une fonction continue de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$. Par tout point $(x_0, t_0) \in I \times \Omega$ il passe une solution maximale (y, J), où J est une intervalle ouvert dans I.*
Si f est de plus localement Lischitzienne par rapport à la seconde variable, cette solution maximale est unique.

Théorème 30 (Critère de prolongement). *Considérons f définie sur $]a,b[\times\mathbb{R}^n$.Soit (y, J) une solution de (1) avec où $J =]\alpha, \beta[$, tel que $a < \alpha < \beta < b$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$, $A > 0$ tel que $|y(t)| \leqslant A$ pour tout $t \in [\beta - \delta, \beta[$ (resp. $]\alpha, \alpha + \delta]$) alors y peut être prolongée au-delà de β (resp. au-delà de α) en une solution de (1).*

Exemple 31. *Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème*

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y^2(t)}{1 + y^2(t)} \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

admet pour tout x_0 une unique solution sur $\mathbb{R}$.

3 Prolongement et holomorphie

Séries entières

$\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et f désigne sa somme sur $\mathbb{D} := D(0,1)$.

Définition 32. *Un point $a \in \partial\mathbb{D}$ est dit **régulier** s'il existe un disque D_a centré en a tel que f soit analytique sur $\mathbb{D} \cup D_a$. Si ce n'est pas le cas a est un point **singulier**.*

Notons A_s l'ensemble des points singuliers, et A_r l'ensemble des points réguliers.

Exemple 33. *Prenons la série $\sum z^n = \dfrac{1}{1-z}$. On a $A_r = \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ et $A_s = \{1\}$.*

Proposition 34. *Si $A_s = \varnothing$ on a $R > 1$.*

Exemple 35. *La fonction $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^{2^n}}{n^2}$ est continue sur $\partial\mathbb{D}$ mais n'y est pas analytique.*

Théorème 36 (D'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ un série entière de rayon de convergence $r \geqslant 1$, de somme f sur et telle que $\sum a_n$ converge vers une limite S. Pour $\theta_o \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on pose :*
$\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, z = 1 - \rho e^{i\theta}, \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\}$
Alors :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_0}} f(z) = S$$

Exemple 37. *Pour $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$, on a $\lim_{\substack{z \longrightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = ln(2)$.*

Théorème 38 (Taubérien faible). *Soit $\sum a_n z^n$ un série entière de rayon de convergence 1, de somme f sur $\mathbb{D}$ et telle qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z < 1}} f(z) = S.$$

Alors si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum a_n$ converge et sa somme est S.

Remarque 39. *Le théorème taubérien faible est une réciproque partielle du théorème d'Abel. Une réciproque plus forte existe si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Contre-exemple 40. *On a :*

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

mais la série $\sum (-1)^n$ diverge.

Fonctions holomorphes

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω.

Définition 41. *On dit qu'un point $a \in \mathbb{C}$ est une **singularité isolée** pour f si a est un point isolé de $\partial\Omega$. On dit que a est une **singularité effaçable** pour f s'il est possible de prolonger f en une fonction holomorphe dans l'ouvert $\Omega \cup \{a\}$.*

Remarque 42. *D'après la proposition 6 ce prolongement est unique par densité de densité de Ω dans $\Omega \cup \{a\}$.*

Théorème 43 (Prolongement de Riemann). *Soit a une singularité isolée pour f. Si f est bornée dans un voisinage épointée de a, alors a est une singularité effaçable(i.e. f se prolonge holomorphiquement en a).*

Exemple 44. *La fonction $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ a une singularité effaçable pour $z = 0$.*

Proposition 45 (**Principe des zéros isolés**). *On suppose Ω connexe.*
Soit f une fonction holomorphe sur Ω, et soit $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros. Alors ou bien $Z(f) = \Omega$ ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω.

Proposition 46 (**Prolongement analytique**). *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω coïncident sur $U \subset \Omega$. Si Ω est connexe et si U a un point d'accumulation dans Ω, alors elle coïncident sur Ω.*

Application 47 (Transformée de Fourier de la gaussienne). *Soit $f(x) = e^{-ax^2}$. Alors la fonction $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{tz}\, dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncide avec $\hat{f}$ sur l'axe imaginaire, on en déduit que $\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$.*

Théorème 48 (**Principe de réflexion de Schwarz**). *Supposons que Ω soit symétrique par rapport à l'axe réel, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega' := \Omega \cap \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ et continue sur $\bar{\Omega}'$. telle que f soit réelle sur l'axe réel.*
Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

DÉVELOPPEMENT 2

Application 49 (**Fonction Γ d'Euler**). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$ la fonction*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

est holomorphe et elle admet un unique prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

Bibliographie

— XAVIER GOURDON : Les maths en tête.
— W. RUDIN : Analyse réelle et complexe
— C. ZUILLY H. QUEFFÉLEC : Analyse pour l'agrégation
— E. AMAR E. MATHERON : Analyse complexe
— P. COLMEZ : Éléments d'analyse et d'algèbre
— H. BRÉZIS : Analyse fonctionnelle