

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

- **Développement 1** : Théorème de Muntz (Application 44)
- **Développement 2** : Différentielle du déterminant (Application 48)

1 Définitions du déterminant

E désignera un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, de dimension $n \geq 1$.

Formes multilinéaires

Définition 1. Soit $x := (x_1, \dots, x_p) \in E^p$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} f : E^p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

On dit que f est :

- **p -linéaire** sur E (ou multilinéaire) si les p applications partielles sont linéaires en tout point de E .
- **alternée** si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.
- **antisymétrique** si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

On note $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p -linéaire sur E , et $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes alternées sur E .

Exemple 2. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f : E^p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_p(x_p) \end{aligned}$$

est une forme p -linéaire.

Remarque 3. Si f est antisymétrique si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition 4. Une forme alternée est toujours antisymétrique, et la réciproque est vraie si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2.

Exemple 5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, puisque $-1 = 1$, symétrique équivaut à antisymétrique. Donc le produit scalaire usuel est une forme antisymétrique non alternée.

Théorème 6. $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $\det_B : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1, \sigma(1)} \cdots x_{n, \sigma(n)}$$

avec $x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$

Déterminant associé à une base

Définition 7. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On dit que l'application $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant du n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base B .

Proposition 8. Soit B, B' deux bases de E et $x_1, \dots, x_n \in E$. On a :

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(B) \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

Théorème 9. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ forment une famille liée
2. Pour toute base B de E , $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$
3. Il existe une base B de E , $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 10. Soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\det(f)$ le déterminant de la famille $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Proposition 11. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors pour toute base on a : $\det_B(f \circ g) = \det_B(f) \det_B(g)$.

Corollaire 12. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est inversible si et seulement si $\det(f) \neq 0$, et $\det(f)$ ne dépend pas de la base choisie.

Corollaire 13. L'application $\det : GL(E) \longrightarrow K^\times$ est un morphisme de groupes.

Déterminant de matrice

Définition 14. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et on le note $\det(A)$, avec :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

$$\text{On notera également : } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple 15.

Proposition 16. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\det(MN) = \det(M) \det(N) = \det(NM)$.

Corollaire 17. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n$, on a $\det({}^t A) = \det(A)$, et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si A est la matrice d'un endomorphisme f , alors $\det(f) = \det(A)$, et donc A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

2 Calcul de déterminant

Simplifications, cas triangulaire

Certaines propriétés du déterminant permettent de construire des règles de calculs :

- Appliquer une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aux colonnes (ou aux lignes) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, multiplie $\det(M)$ par $\epsilon(\sigma)$.
- On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne (ou colonne) une combinaison linéaire des autres.

Proposition 18. Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

Corollaire 19. Si M est une matrice triangulaire, alors $\det(M)$ est le produit des coefficients diagonaux de M .

Mineurs et cofacteurs

Définition 20. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle :

1. **mineur** de l'élément $a_{i,j}$ pour tout (i,j) , le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de la matrice A .
2. **cofacteur** de $a_{i,j}$, le scalaire : $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Exemple 21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

On a alors $\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

et $A_{1,1} = (-1)^{1+1} \Delta_{1,1} = \Delta_{1,1} = 5 \times 9 - 6 \times 8 = -3$

Théorème 22. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A_{i,j}$ les cofacteurs des éléments de A . Alors :

- (Développement par rapport à j -ème colonne)
 $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$
- (Développement par rapport à i -ème ligne)
 $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$

Définition 23. La matrice $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des cofacteurs des éléments d'une matrice A , est appelée **comatrice** de A . On la note $\text{Com}(A)$.

Proposition 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A) A = \det(A) I_n$.

Corollaire 25. Si A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)$$

Déterminants particuliers

Exemple 26. Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

On note : $V(x_1, \dots, x_n) = I_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Alors $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Exemple 27. Déterminant circulant

Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et un polynôme $P = a_1 + a_2 X + \dots + a_n X^n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$$

Exemple 28. Déterminant de Cauchy

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout (i,j) , $a_i + b_j \neq 0$. Alors :

$$\det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right) = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

3 Applications

3.1 Algèbre linéaire

Cramer

Considérons (S) le système linéaire $AX = B$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, et $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Ce système admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Les solutions sont données par ce qu'on appelle les **formules de Cramer** :

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

avec A_i la i -ème colonne de A .

Exemple 29. Le système $\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ 2x + y + 2z = \gamma \end{cases}$ admet pour solution : $\begin{cases} x = \frac{\alpha + 3\beta - 4\gamma}{-6} \\ y = \alpha + \beta - \alpha \\ z = \frac{-\alpha}{3} \end{cases}$

Polynôme caractéristique

Application 30. *Existence et unicité du polynôme interpolateur de Lagrange.*

Définition 31. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Exemple 32. $P_{I_n}(X) = (1 - X)^n$

Remarque 33. On a $P_A(0) = \det(A)$. Une matrice a même polynôme caractéristique que sa transposée.

Proposition 34. Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre d’une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $P_A(\lambda) = 0$.

Théorème 35. (Cayley-Hamilton)
Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur

Proposition 36. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note E_{λ_i} l’espace propre associé à la valeur propre λ_i de multiplicité h_i . Alors A est diagonalisable si et seulement si P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\dim E_{\lambda_i} = h_i$ pour tout i .

Exemple 37. Trouver contre-exemple d’une matrice réelle a polynôme scindé non diagonalisable.

Théorème 38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si et seulement si son P_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 39. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Application 40. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M .

3.2 Géométrie

Dans cette partie uniquement $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un espace préhilbertien.

Définition 41. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle **matrice de Gram** la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et **déterminant de Gram** son déterminant, que l’on note $G(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 42. Exemple simple d’une matrice de gram de taille 2,2 idéalement.

Théorème 43. Soit V un sous-espace vectoriel de E , muni d’une base $(e_1, \dots, e_n)$, et soit $x \in E$. Alors la distance de x à V est donnée par :

$$d(x, V) = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Application 44. DÉVELOPPEMENT 1

Théorème de Muntz
Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ strictement croissante. Alors $\text{vect}(x^{\alpha_n})$ est dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

3.3 Analyse

Régularité et topologie

Proposition 45. L’application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application continue (même C^∞), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Application 46. $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Application 47. $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Application 48. DÉVELOPPEMENT 2
L’application $\det$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tout $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$D_{\det}(X) \cdot H = \text{tr}({}^t\text{Com}(X)H)$$

Proposition 49. Soit $1 \leq r \leq n$. L’ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(M) \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 50. On a $\overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(M) = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(M) \leq r\}$.

Changement de variable

Théorème 51. (Changement de variable)
Soit ϕ un C^1 -difféomorphisme entre deux ouverts D et Δ de $\mathbb{R}^d$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction mesurable. Alors f est λ_D -intégrable sur D si et seulement si $(f \circ \phi)|\det(Jac_\phi)|$ est λ_Δ -intégrable sur Δ , et on a :

$$\int_D f(x) \, dx = \int_\Delta f(\phi(u)) |\det(Jac_\phi(u))| \, du$$

Application 52. (Calcul de l’intégrale de Gauss)
Un changement de variable en coordonnées polaires donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

Bibliographie

- XAVIER GOURDON : Algèbre
- XAVIER GOURDON : Analyse
- JEANÉTIENNE ROMBALDI : Mathématiques pour l’agrégation
- FRANÇOIS ROUVIÈRE : Petit guide de calcul différentiel