Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension fini

— Développement 1 : Décomposition polaire
— Développement 2 : Diagonalisation des endomorphismes normaux

E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E. f ou u désignent des endomorphismes de E.

1 Polynômes d'endomorphismes

Eléments propres

Définition 1 (Valeur propre). *$\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u, s'il existe $x \in E$ non nul, tel que $u(x) = \lambda x$. On dit alors que x est **vecteur propre** attaché à la valeur propre λ.*
*On appelle **spectre** l'ensemble des valeurs propres u, et on note $Spec(u)$ cet ensemble.*

Remarque 2. 0 *est valeur propre de u si et seulement si* $\ker u \neq \{0\}$.

Définition 3. *Soit λ une valeur propre de u. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \,|\, u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda Id)$ est sous-espace vectoriel de E stable par u, appelé **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ.*

Théorème 4. *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des valeurs propres de u, distinctes deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_k}$ sont en sommes directe.*

Polynômes d'endomorphismes

Définition 5. *Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_i X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_i u^k \in \mathcal{L}(E)$ avec u^k la k-ième itéré de u.*

Proposition 6. *L'application*

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$$

est morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre, on note $\mathbb{K}[u]$ l'image de ce morphisme.

Définition 7. *On appelle **polynôme minimal** le générateur unitaire de $\ker \Psi$. On le note π_u.*
*Les polynômes de $\ker \Psi$ sont appelés polynômes **annulateurs**.*

Théorème 8 (Lemme des noyaux). *Soit $P = P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{K}[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Alors*

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$$

Polynôme caractéristique

Définition 9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P_A(X) = \det[A - XI_n]$.*
On note P_u le polynôme caractéristique de u, qui est le polynôme caractéristique de la matrice de u.

Proposition 10. *Soit F un sous-espace vectoriel strict E, stable par f, et soit $g := f_{|F}$ la restriction de f à F. Alors g est un endomorphisme de F et P_g divise P_f.*

Corollaire 11. *Soit λ une racine de P_u d'ordre de multiplicité h. Alors $\dim E_\lambda \leqslant h$.*

Proposition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $P_A(0) =$ $\det(A)$ et $P_{{}^tA} = P_A$. Et si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ on a $P_{PAP^{-1}} = P_A$.*

Proposition 13. *$GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Application 14. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $P_{AB} = P_{BA}$.*

Théorème 15 (Cayley-Hamilton). *Le polynôme caractéristique de f est annulateur.*

2 Diagonalisation

Critères de diagonalisation

Définition 16. *On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de vecteur propre de u. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 17. *f est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et ayant toutes ses racines simples.*

Corollaire 18. *Si u est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.*

Application 19. *Si f est de rang 1, alors f est diagonalisable si et seulement si $tr(f) \neq 0$.*

Application 20. *Si $\mathbb{K}$ est un corps fini à q éléments, alors f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$*

Proposition 21. *Si P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, alors u est diagonalisable.*

Théorème 22. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est diagonalisable*
2. *P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racines λ_i de P_u d'ordre de multiplicité h_i, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$*
3. *π_u est scindé et à racines simples.*
4. *Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de u vérifiant $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$*

Corollaire 23. *Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.*

Exemple 24. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable d'après la proposition 21.*

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable d'après le théorème*

Application 25 (Commutant)**.** *Soit $\mathcal{C}(f) := \{g \in \mathcal{L}(E) \mid fg = gf\}$.*

1. *si f est diagonalisable alors $\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{k=1}^{r} \dim(E_k)^2$, pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$, et où les E_k sont les espaces propres de f.*
2. *Si de plus, les valeurs propres de f sont distinctes deux à deux, alors $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.*

Cayley-Hamilton, le retour...

Proposition 26. *L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Remarque 27. *Ce résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Application 28 (Théorème de Cayley Hamilton)**.** *Le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est annulateur.*

Proposition 29. *On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables.*
$\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on a $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Diagonalisation simultanée

Proposition 30. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors :*

1. *Tout sous-espace propre de u est stable par v*
2. *$\mathrm{Im}(u)$ est stable par v*

Théorème 31. *Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation. On dit alors que u et v sont **codiagonalisables**.*

Corollaire 32. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'endomorphismes commutant deux à deux. Si f_n est diagonalisable pour tout n, alors il existe une base commune de diagonalisation.*

3 Endomorphismes remarquables

3.1 Autoadjoints

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace hermitien.

Définition 33 (Adjoint)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f et g sont dits **adjoints** si pour tout $(x, y) \in E^2$:*

$$\langle f(x); y \rangle = \langle x; g(y) \rangle \tag{1}$$

*L'endomorphisme f étant donné, il existe au plus un endomorphisme g vérifiant (1). Lorsqu'il existe, on l'appelle **ajoint** de f et on le note f^*. Si $f = f^*$, on dit que f est **autoadjoint**.*

Remarque 34. *Nous sommes en dimension finie donc l'adjoint existe toujours, mais ce n'est pas vrai en dimension quelconque.*

Définition 35. *On dit que f est autoadjoint si pour tout $x, y \in E$ on a $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.*

Remarque 36. *f est autoadjoint si et seulement si $M^* := M$, où M désigne la matrice de f dans une base de E, et M^* sa transconjuguée.*

Théorème 37 (Théorème spectral)**.** *Si f est autoadjoint alors f est diagonalisable dans une base orthonormée, et ses valeurs propres sont réelles.*

Proposition 38. *Si f est autoadjoint, ses sous espaces propres sont orthogonaux deux à deux.*

Proposition 39. $\boxed{\text{DÉVELOPPEMENT}}$
L'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathcal{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ & & (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}$$

est un homéomorphisme, où $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{H}_n^{++}$ désignent respectivement les matrices unitaires et hermitiennes définies positives

3.2 Endomorphismes normaux

Définition 40. *On dit que f est un endomorphisme **normal** si f et f^* commutent.*

Exemple 41. *Les matrices antisymétriques sont normales.*

Proposition 42. *Si f est normal, alors pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.*

Lemme 43. *Si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.*

Lemme 44. *Si f est un endomorphisme normal, et E_λ un sous-espace propre associé à une valeur propre λ, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par f.*

Théorème 45. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est normal ;*
2. *u se diagonalise dans une base orthonormale de E ;*
3. *u et u^* sont codiagonalisable dans une base orthonormale.*

3.3 Endormorphismes normaux réels

Dans cette section E désigne un espace euclidien.

Lemme 46. *On suppose que $\dim E = 2$ et que f est un endomorphisme normal de E. Alors dans toute base de E, la matrice de f est de la forme :* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, *avec $b \neq 0$.*

Théorème 47. $\boxed{\textsc{Développement}}$

Soit f un endomorphisme normal de E. alors il existe un base orthonormée B de E telle que :

$$Mat(f)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i, et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour tout j.

3.4 Dunford

Proposition 48. *Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f, et soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.*
Pour tout i on note $N_i := \ker M_i^{\alpha_i}(f)$.
Alors $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, et pour tout i la projection sur N_i parrallèlement à $\oplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 49. *Supposons P_u scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente, tels que*

1. *$u = d + n$*
2. *$d \circ n = n \circ d$*

3.5 Exponentielle de matrice

Définition 50. *L'application exponentielle matricielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la série convergente $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$.*

Proposition 51. *Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $uv = vu$. Alors :*

$$\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v) = \exp(v)\exp(u)$$

.

Application 52. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet la décomposition de Dunford $A = D + N$. Alors :*

1. *$e^A = e^D e^N$,*
2. *et $e^A = e^D + e^D(e^V - I_n)$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$.*

Corollaire 53. *u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable.*

Bibliographie

— Xavier Gourdon : Les maths en tête.
— J-E Rombaldi : Algèbre, géométrie