157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Dans cette leçon, K désigne un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Rappels - Endomorphismes trigonalisables

1) Rappels : outils de caractérisation et de réduction

Déf./Prop. ①: $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$. L'unique polynôme unitaire μ_u tel que $\mathrm{Ann}(u) = (\mu_u)$ est appelé polynôme minimal de u.

Déf ②: On appelle polynôme caractéristique de u : $\chi_u = \det(X\mathrm{Id} - u) \in K[X]$

Th ③: (Cayley-Hamilton) : $\chi_u \in \mathrm{Ann}(u)$

Th. ④: μ_u et χ_u ont mêmes facteurs irréductibles dans $K[X]$

Déf./Prop. ⑤: $\lambda \in K$ est une valeur propre de u SSI λ est racine de χ_u. En notant m_λ sa multiplicité, on définit :

- $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})$ le sous-espace propre de u associé à λ
- $E_\lambda^{m_\lambda} = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})^{m_\lambda}$ le sous-espace caractéristique de u associé à λ.

E_λ et $E_\lambda^{m_\lambda}$ sont stables par u.

Th. ⑥. (lemme des noyaux)

Soient $P, P_1, P_2 \in K[X]$ tels que $P = P_1P_2$ et $P_1 \wedge P_2 = 1$.

Alors, $\mathrm{Ker}\,P(u) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$.

De plus, le projecteur de $\mathrm{Ker}(P(u))$ sur $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ (resp. $\mathrm{Ker}\,P_2(u)$) parallèlement à $\mathrm{Ker}(P_2(u))$ (resp. $\mathrm{Ker}\,P_1(u)$) est un polynôme en u.

2) Endomorphismes trigonalisables et caractérisation

Déf. ⑦: $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable s'il existe $P \in GL_n(K)$, $T \in \mathcal{M}_n(K)$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$

Th ⑧: u est trigonalisable SSI χ_u est scindé (sur K).

Coro ⑨: u trigonalisable $\Leftrightarrow$ μ_u scindé $\Leftrightarrow$ $\exists P \in K[X]$ scindé tq $P(u) = 0$

Ex ⑩: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas trigonalisable, mais $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Coro. ⑪: Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

Coro. ⑫: Si u est trigonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $u_{|F}$ est trigonalisable.

3) Trigonalisation simultanée (ou cotrigonalisation)

Prop. ⑬: Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors :

i) tout sous-espace propre de u est stable par v

ii) $\mathrm{Im}\,u$ est stable par v

Th. ⑭: Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables tels que $uv = vu$. Alors il existe une base commune de trigonalisation.

Coro ⑮: si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent et sont trigonalisables, alors $u + v$ et uv sont trigonalisables.

Rq ⑯: c'est a priori faux si u et v ne commutent pas. En particulier, l'ensemble $(T_n(E), +)$ des endomorphismes trigonalisables n'est pas un groupe.

II. Endomorphismes nilpotents

Déf. ⑰: $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(K)$) est dit nilpotent s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$ (resp. $M^k = 0$). Le plus petit de ces entiers est alors appelé indice de nilpotence de u (resp. M), noté n_u (resp. n_M).

Ex. ⑱: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 2.

Prop. ⑲: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes

i) u est nilpotent

ii) $\mu_u = X^r$ pour un certain $r \geq 1$.
On a alors $n_u = r$. En particulier $n_u \leq \dim_K(E)$.

iii) χ_u est scindé et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$

iv) $\chi_u = X^n$

Rq 20 : $Sp(u)=\{0\} \not\Rightarrow u$ nilpotent. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prop. 21 : i) si u est diagonalisable et nilpotente, alors $u=0$
ii) si u et v sont nilpotents et $uv=vu$, alors $u+v$ et uv sont nilpotents

Rq 22 : La réciproque est fausse. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Rq 23 : $\mathcal{N}(E)=\{u\in\mathcal{L}(E) \,/\, u \text{ nilpotent}\}$ est appelé cône nilpotent de E. Il est stable par multiplication par un scalaire, mais pas par addition ou par composition.

DVP 1

Prop. 24 : Si K est de caractéristique nulle, alors
u est nilpotent $\iff Tr(u^k)=0$ pour tout $k\geq 1$

Rq 25 : C'est faux si $car(K)\neq 0$. Par exemple $I_p\in\mathcal{M}_p(\mathbb{F}_p)$, où p est un nombre premier

Th. 25 : (Burnside)
Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (i.e. tel qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^N=I_n$ pour tout A dans ce sous-groupe), est fini.

Th. 26 : (Lemme des noyaux itérés)
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice r.
Alors $Ker(u^{i-1}) \subsetneq Ker(u^i)$ pour tout $i\in\{1\dots r\}$
et $Ker(u^i)=Ker(u^r)=E$ pour tout $i\geq r$

III. Réduction (Intro : utilité de la réd. [Bu] p941)

1) Endomorphismes cycliques $u\in\mathcal{L}(E)$ est fixé

Déf. 27 : Soit $x\in E$. Le sous-espace stable engendré par x, noté E_x, est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u.

Déf/Prop. 28 : i) $Ann(x)=\{P\in K[X] \mid P(u)(x)=0\}$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$. L'unique générateur unitaire de $Ann(x)$, noté μ_x, est appelé polynôme minimal de x.
ii) $\mu_x \mid \mu_u$
iii) $E_x=\{P(u)(x),\, P\in K[X]\}=Vect(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x))$ où $d=deg(\mu_x)$

Prop. 29 : Il existe $x\in E$ tel que $\mu_x=\mu_u$. Un tel vecteur est appelé vecteur u-maximal

Déf. 30 : $u\in\mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x_0\in E$ tel que $(x_0,u(x_0),\dots,u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Déf. 31 : Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0\in K[X]$. La matrice
$C_P=\begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ est appelée matrice compagnon de P

Prop. 32 : Avec les mêmes notations, $\chi_{C_P}=P$.

Prop. 33 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes
i) u est cyclique
ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice compagnon
iii) il existe $x\in E$ tel que $E_x=E$
iv) $deg(\mu_u)=n$
v) $\chi_u=\mu_u$

2) Décomposition de Dunford

DVP 2

Th. 34 : (Dunford)
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe $\delta, \nu\in\mathcal{L}(E)$ tels que
i) $u=\delta+\nu$
ii) δ et ν commutent
iii) δ est diagonalisable et ν est nilpotent
De plus, δ et ν sont des polynômes en u.
Enfin, cette décomposition est unique.

Ex (35) : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$

Exercice (36) : Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi_u=(X-1)^2(X-2)$.
Déterminer δ et ν en fonction de u.

Applications (37) :

- calcul de puissances de u
- calcul de $\exp(M)$
- DVP 2 montrer que : $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow e^M$ est diagonalisable

3) Réduction de Jordan

Déf. (38) : Soit $n\geq 1$ un entier, $\lambda\in K$. On appelle cellule de Jordan de taille n une matrice $J_{n,\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&&1\\0&&&\lambda\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(K)$

Un bloc de Jordan de taille n associé à λ est une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix}J_{n_1,\lambda}&&0\\&\ddots&\\0&&J_{n_k,\lambda}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(K)$ où $1\leq n_1\leq\dots\leq n_k$ et $n_1+\dots+n_k=n$

Déf. (39) : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Une base de Jordan pour u est une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u)=\begin{pmatrix}J_{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&J_{\lambda_r}\end{pmatrix}$ où $J_{\lambda_1}\dots J_{\lambda_r}$ sont des blocs de Jordan associés à des éléments $\lambda_1\dots\lambda_r\in K$ distincts

Rq (40) : Si u admet une base de Jordan, alors χ_u est scindé et $\lambda_1\dots\lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u.

Th. (41) : *(réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents)*
Tout endomorphisme nilpotent admet une base de Jordan

Notation (42) : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Pour tout $\lambda\in Sp(u)$ et pour tout $k\geq 1$, on pose $d_{k,\lambda}=\dim\ker(u-\lambda id)^k-\dim\ker(u-\lambda id)^{k+1}$

Prop. (43) : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice r, et $J_0=\begin{pmatrix}J_{n_1,0}&&\\&\ddots&\\&&J_{n_k,0}\end{pmatrix}$ une forme de Jordan de u.
Alors, $n_k=r$ et pour tout $k\in\{1\dots r\}$, le nombre de cellules de Jordan de taille $\geq k$ est $d_{k,0}$.
En particulier, le nombre de cellules de taille k est $d_{k,0}-d_{k+1,0}$.

Rq. (44) : On peut donc décomposer E en somme directe de sous-espaces cycliques.

Th (45) : *(réduction de Jordan)*
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors, u admet une base de Jordan.
De plus, si on écrit $\mu_u=\prod_{\lambda\in Sp(u)}(X-\lambda)^{r_\lambda}$, alors

- la taille maximale d'une cellule de Jordan de J_λ est r_λ
- pour tout $k\in\{1\dots r_\lambda\}$, il y a $d_{k,\lambda}-d_{k+1,\lambda}$ cellules de Jordan de la forme $J_{k,\lambda}$ dans J_λ

trop long !

Enfin, deux endomorphismes u et u' de polynômes caractéristiques scindés sont semblables si et seulement si ils ont même forme de Jordan

4) Réduction de Frobenius

Prop. (46) : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $x\in E$ un vecteur u-maximal, i.e. tel que $\mu_x=\mu_u$. Alors E_x admet un supplémentaire stable par u

Th. (47) : *(décomposition de Frobenius)*
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Il existe $r\in\mathbb{N}^*$, $F_1\dots F_r$ des sous-espaces, $\chi_1\dots\chi_r\in K[X]$ tels que

i) $E=F_1\oplus\dots\oplus F_r$
ii) $\forall i\in\{1\dots r\}$, F_i est stable par u, et u_{F_i} est cyclique de polynôme minimal χ_i
iii) $\chi_1|\chi_2|\dots|\chi_r$

$\chi_1\dots\chi_r$ sont uniques et sont appelés invariants de similitude de u
On a de plus $\chi_r=\mu_u$ et $\chi_1\dots\chi_r=\chi_u$
Enfin, il existe une base B de E telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u)=\begin{pmatrix}C_{\chi_1}&&0\\&\ddots&\\0&&C_{\chi_r}\end{pmatrix}$$