Leçon 158 : Matrices symétriques. Matrices hermitiennes.

Gourdon
Rombaldi
Grifone
Allaire - Kaber
Isenmann (devs)

I. Généralités

1. Définitions et premières propriétés [Gou]

Définition 1.1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit alors que :

- M est symétrique si ${}^tM = M$, on note alors $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$
- M est antisymétrique si ${}^tM = -M$, on note alors $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

Proposition 1.2 On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
De plus, $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Définition 1.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est une matrice hermitienne si elle vérifie ${}^tM = \overline{M}$. On note alors $M \in \mathcal{H}_n$.

Remarque 1.4 Les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

Proposition 1.5 On a : $\mathcal{H}_n = \mathcal{S}_n \oplus i\mathcal{A}_n$.

Remarque 1.6 L'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2 mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 1.7 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on dit que :

- S est positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^tx S x \geq 0$; on note alors $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- S est définie positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tx S x > 0$; on note alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Lien avec les formes quadratiques [Gou]

Définition 1.8 Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est symétrique si pour tout $(x,y) \in E \times E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Proposition 1.9 Une forme bilinéaire sur E de dimension n est symétrique si et seulement si pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1.10 Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. On dit que φ est à symétrie hermitienne si pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

Proposition 1.11 Une forme sesquilinéaire φ sur E $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n est à symétrie hermitienne ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{H}_n$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E

II. Réduction

1. Orthogonalité et réduction [Rom]

On considère Φ une forme quadratique (resp hermitienne) de forme polaire φ.

Définition 2.1 Une base $\mathcal{B}$ de E est dite orthogonale pour Φ si pour tous $e_1, e_2 \in \mathcal{B}$ distincts, $\varphi(e_1, e_2) = 0$.

Proposition 2.2 Il existe une base orthogonale pour Φ.

Théorème 2.3 (spectral) Toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Lemme 2.4 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}$, et $E_\lambda \perp E_\mu$ pour $\lambda \neq \mu \in Sp(A)$.

Lemme 2.5 Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in Sp(A)$ de vecteur propre unitaire x. Alors $H = (\mathbb{R}x)^\perp$ est stable par A.

Conséquence 2.6 Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

2. Applications du théorème spectral [Rom]

Théorème 2.7 Soit $(A_i)_i$ une famille de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors la famille est codiagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si les matrices commutent deux à deux.

Théorème 2.8 (orthogonalisation simultanée) Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour M qui diagonalise N.

Théorème 2.9 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, il existe alors une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Corollaire 2.10 (décomposition polaire) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, cette écriture est unique.

développement 1

3. Réduction des matrices hermitiennes [Gri]

Théorème 2.11 Toute matrice $M \in \mathcal{H}_n$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire hermitien canonique.

Corollaire 2.12 Soit $M \in \mathcal{H}_n$, il existe alors une matrice unitaire U (${}^t U \overline{U} = I_n$) telle que ${}^t\overline{U} A U$ soit diagonale réelle.

III - Applications

1. Topologie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Proposition 3.1 L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme 3.2 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On considère l'ellipsoïde $E_S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q_S(x) := {}^t x S x \leq 1 \}$ alors $\mathrm{Vol}\, E_S = \mu(S) \mathrm{Vol}(B)$ où $\mu : M \longmapsto (\det M)^{-1/2}$ et $B = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$.

Proposition 3.3 L'espace $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe et μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

Théorème 3.4 (John - Loewner) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide. Il existe alors un unique ellipsoïde, centré en 0, de volume minimal, contenu dans K.

développement 2

2. Analyse numérique matricielle [AK]

Théorème 3.5 Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les mineurs principaux sont non nuls. Il existe alors un unique couple de matrices (L, U), avec L triangulaire inférieure de diagonale unité et U triangulaire supérieure, tel que $A = LU$.

Exemple 3.6

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & -2/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 7 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Corollaire 3.7 Si de plus, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe L triangulaire inférieure à diagonale unité et D diagonale telle que $A = L D\, {}^t L$.

Théorème 3.8 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice L triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictements positifs, telle que $A = L\, {}^t L$.

Exemple 3.9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 13 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} = L\,{}^t L \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Application 3.10 (moindres carrés) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathbb{R}^n$, on cherche $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|Ax - b\|_2 = \inf_y \|Ay - b\|$. Alors :

- il existe une solution
- x est solution $\Leftrightarrow {}^t A A x = {}^t A b$
- si $n \geq p$ et $\mathrm{Rg}(A) = p$; en notant L la matrice de la factorisation de Cholesky de ${}^t AA$, $x = (L\,{}^t L)^{-1}\, {}^t A b$ est solution