Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Rombaldi
Isenmann – P. (dev 1)
Gourdon (dev 2)

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Préliminaires théoriques

1. Sous-espaces propres

Définition 1.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda := \ker(u - \lambda\, id)$ est le sous-espace propre associé à λ.

Remarque 1.2 Si λ n'est pas valeur propre de u alors $E_\lambda = \{0_E\}$.

Théorème 1.3 Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Définition 1.4 On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u = \det(u - X id)$.

Exemple 1.5

$\chi_{C_P} = P$ où C_P est la matrice compagnon de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ unitaire.

Proposition 1.6 Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

2. Sous-espaces caractéristiques

Proposition - Définition 1.7 On appelle polynôme minimal de u, noté π_u, l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$.

Théorème 1.8 (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique χ_u annule u.

Corollaire 1.9 On a : $\pi_u \mid \chi_u$.

Définition 1.10 Soit λ racine de χ_u de multiplicité q_λ, on définit le sous-espace caractéristique $E_\lambda' := \ker(u - \lambda id)^{q_\lambda}$.

Lemme 1.11 (des noyaux) Soient $P_1, \dots, P_r$ deux à deux premiers entre eux. Alors $\ker P_1 \dots P_m(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u)$.

Application 1.12 Les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe, qui vaut E.

II. Diagonalisation

1. Définition et premières propriétés

Définition 2.1 L'endomorphisme u est dit diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Définition 2.2 On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ tels que : $A = PDP^{-1}$.

Théorème 2.3 L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme directe de ses sous-espaces propres vaut E.

2. Critères de diagonalisation

Théorème 2.4 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable
- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ où λ_k est de multiplicité $\dim E_{\lambda_k}$
- $\exists P \in \mathbb{K}[X]$, scindé à racines simples, $P(u) = 0$
- π_u scindé à racines simples

Application 2.5 Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est diagonalisable si et seulement si $X^q - X$ annule M.

Application 2.6 Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que M^P soit diagonalisable alors M l'est.

Contre-exemples 2.7

- $M \notin GL_n$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de carré diagonale, mais est non diagonalisable
- $M \in GL_n(\mathbb{R})$: $r_{\pi/2}$ est de carré diagonale mais est non diagonalisable

3. Applications

Proposition 2.8 Soit P_0 un polygone du plan de sommets $(A_0, \dots, A_k)$. On construit $(P_n)_n$ suite de polygones telle que P_{n+1} a pour sommets les milieux des arêtes de P_n. Alors $(P_n)_n$ converge vers l'isobarycentre de P_0.

développement 1

Soit M matrice diagonalisable, $M = PDP^{-1}$.

Proposition 2.9 Pour tout k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

Corollaire 2.10 On a : $e^M = P e^D P^{-1}$ avec $e^D = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}$.

Proposition 2.11 $X' = M.X \iff Y' = DY$ où $Y(t) = P^{-1}X(t)$

Théorème 2.12 (décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Alors il existe un unique couple (d, n), avec d diagonalisable et n nilpotente, tel que $u = n + d$ et $d \circ n = n \circ d$.

Contre-exemple 2.13

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford

Application 2.14 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé alors M est diagonalisable si et seulement si e^M l'est.

développement 2

III. Familles d'endomorphismes

1. Topologie

Théorème 3.1 L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}_n'(\mathbb{C})$ est dense sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 3.2 L'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$, $T_n(\mathbb{R})$ est fermé et on a : $D_n'(\mathbb{R})$ dense dans $T_n(\mathbb{R})$.

Application 3.3 Pour $n \geq 2$, $A \longmapsto \pi_A$ n'est pas continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Application 3.4 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

2. Diagonalisation simultanée

Théorème 3.5 Soit $(u_i)_i$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E. Alors la famille $(u_i)_i$ est codiagonalisable si et seulement si les endomorphismes commutent deux à deux.

Définition 3.6 Une famille $(u_i)_i$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite codiagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que pour tout i, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u_i$ soit diagonale.

Application 3.7 Si car $\mathbb{K} \neq 2$, $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K})$ si et seulement si $n = m$.

3. Endomorphismes symétriques

Soit E un espace euclidien, $n \geq 2$.

Lemme 3.8 Soient $\lambda \neq \mu \in Sp(u)$ pour $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Lemme 3.9 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et λ_1 valeur propre dont un vecteur propre est e_1 avec $\|e_1\| = 1$. Alors $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u et $u_H \in \mathcal{S}(H)$.

Théorème 3.10 (spectral) Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.