Leçon 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Audin
Rombaldi
Isenmann. P (dev1)
Grifone

I. Géométrie affine

1. Espaces affines [Rom]

Définition 1.1 Un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure affine par la donnée d'un espace vectoriel E et d'une application d'action $\mathcal{E} \times E \longrightarrow \mathcal{E}$, $(x,u) \longmapsto x+u$.

Proposition 1.2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On a alors :

- pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA} = 0$
- pour tous $A,B,C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)
- pour tous $A, B, A', B' \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ (loi du parallélogramme)

où $\overrightarrow{AB} := u$ tel que $B = A+u$.

Définition 1.3 Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, on dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si il existe $\Omega \in \mathcal{F}$ tel que $\{\overrightarrow{\Omega A} \mid A \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.4 Soit F un sous-espace vectoriel de E, les orbites de l'action $(x,u) \longmapsto x+u$ de F sur $\mathcal{E}$ sont alors des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Ces orbites sont définies par $\mathcal{F}_\Omega = \{\Omega + u \mid u \in F\}$.

Définition 1.5 Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ espaces affines de directions E, E'. On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est affine s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,E')$ telle que $f(x+u) = f(x) + \varphi(u)$ pour tout $(x,u) \in \mathcal{E} \times E$. On note $\varphi = \vec{f}$ uniquement déterminée.

Proposition 1.6 Si une application affine f est bijective, son inverse est affine d'application linéaire associée $\vec{f}^{-1}$.

La composée $f \circ g$ d'applications affines est affine d'application linéaire associée $\vec{f} \circ \vec{g}$.

Exemple 1.7 Une translation t_u est une bijection affine d'application linéaire associée id_E.

Théorème 1.8 Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ des espaces affines. Pour tous $\varphi \in \mathcal{L}(E,E')$, $a \in \mathcal{E}$ et $a' \in \mathcal{E}'$, il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ telle que $\vec{f} = \varphi$ et $f(a) = a'$.

Conséquence 1.9 Deux applications affines ayant même application linéaire sont égales, si et seulement si elles coïncident en un point.

2. Le groupe affine GA(E) en dimension finie [Rom]

On considère $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, de dimension $n \geq 1$.

Définition-Proposition 1.10 On appelle espace affine, l'ensemble $GA(\mathcal{E})$ des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$. Alors $GA(\mathcal{E})$ est un groupe et $\chi : GA(\mathcal{E}) \longrightarrow GL(E)$ est un morphisme de groupes surjectif.

Théorème 1.11

(i) l'application $(f, A) \in GA(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \longmapsto f(A)$ définit une action transitive de $GA(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$

(ii) le stabilisateur de $\Omega \in \mathcal{E}$ est le sous-groupe des bijections affines fixant Ω

(iii) pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, $\mathrm{stab}(\Omega) \longrightarrow GL(E)$, $f \longmapsto \vec{f}$ réalise un isomorphisme

(iv) soit $\Omega \in \mathcal{E}$, pour tout $f \in GA(\mathcal{E})$, $\exists! (u,g), (v,h) \in E \times \mathrm{Stab}(\Omega)$, $f = t_u \circ g = h \circ t_v$

Théorème 1.12

(i) l'ensemble $T(\mathcal{E})$ des translations de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe commutatif et distingué de $GA(\mathcal{E})$

(ii) $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \in T(\mathcal{E}) \iff f$ commute à toute translation

(iii) pour tout $f \in GA(\mathcal{E})$, tout $u \in E$, $f \circ t_u \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(u)}$

3. Barycentres [Aud]

Proposition-Définition 1.13 Soit $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$ un système de points pondérés de l'espace affine $\mathcal{E}$ tel que $\sum \alpha_i \neq 0$. Il existe alors un unique point G de $\mathcal{E}$ vérifiant $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$, que l'on appelle barycentre du système.

On a alors pour tout point $O \in \mathcal{E}$, $(\sum \alpha_i) \overrightarrow{OG} = \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

Définition 1.14 Lorsque les coefficients α_i sont égaux, on parle d'isobarycentre des points $A_1, \dots, A_n$.

L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$ et l'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC.

Proposition 1.15 Étant donnés des scalaires $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{r,1} \dots \alpha_{r,k_r}$ tels que $\sum_j \alpha_{i,j} \neq 0$ et $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \neq 0$. Le barycentre de $((A_{1,1}, \alpha_{1,1}), \dots, (A_{r,k_r}, \alpha_{r,k_r}))$ coïncide avec le barycentre de $((B_1, \sum_j \alpha_{1,j}), \dots, (B_r, \sum_j \alpha_{r,j}))$ où B_ℓ est le barycentre de $((A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \dots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i}))$.

Proposition 1.16 Soit P un polygone du plan complexe de sommets $z_1, \dots, z_n$. On définit alors une suite de polygones $(P_k)_k$ par récurrence avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors, la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P. développement 1

II - Géométrie euclidienne [Gri]

1. Espaces euclidiens et transformation orthogonale

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, de dimension $n \geq 1$.

Proposition 2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Corollaire 2.2 L'application $\|\cdot\| : x \in E \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme.

Proposition - Définition 2.3 Il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \|y\|} = \cos\theta$ pour $x, y \in E \setminus \{0\}$. On dit que θ est l'angle non orienté de x et y.

Définition 2.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une transformation orthogonale si pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. On note $O(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales de E.

Proposition 2.5 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $f \in O(E)$
- $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
- $\exists \mathcal{B}$ base orthonormée, ${}^tA.A = I$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Proposition 2.6 L'ensemble $O(E)$ forme un sous-groupe de $GL(E)$ d'endomorphismes de déterminant ± 1.

Définition 2.7 Soit $f \in O(E)$,

- si $f \neq id_E$ et $f^2 = id_E$, on dit que f est une symétrie orthogonale (par rapport à $E_1(f)$)
- si f est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, on dit que f est une réflexion
- si f est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$, on dit que f est un retournement

Théorème 2.8 Soit $u \in O(E)$. Alors u est le produit de s réflexions où s désigne $rg(u - id_E)$.

Si $u \in SO(E)$, alors u est le produit d'au plus s retournements.

2. Les isométries en dimension 2 ou 3

Proposition 2.9 Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$.

- si $A \in SO_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ Rotation de centre O et d'angle θ
- sinon, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ représente la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$

Proposition 2.10 Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{e_i}(f)$. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ orthonormée telle que $A' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Proposition 2.11 Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ avec $A \neq \pm I_3$.

- si $\det A = 1$, A représente une rotation autour de l'axe E_1 d'angle $\mathrm{tr}\, A = 2\cos\theta + 1$
- si $\det A = -1$, A représente une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie d'une symétrie orthogonale par rapport à $E_{-1}^{\perp}$, l'angle de la rotation est donné par $\mathrm{tr}\, A = 2\cos\theta - 1$

III - Études de groupes d'isométries [Rom]

1. Isométries du cube

Définition 3.1 On définit $Is(C)$ le groupe des isométries du cube, i.e. des isométries qui conservent le cube et $Is^+(C)$ les isométries positives du cube.

Lemme 3.2 L'application $Is^+(C) \longrightarrow Is^-(C)$, $\varrho \longmapsto \varrho \circ \delta_0$ est une bijection et $\# Is(C) = 2 \# Is^+(C)$.

Proposition 3.3 Le groupe $Is^+(C)$ agit transitivement sur les grandes diagonales $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$ du cube.

Proposition 3.4 On a les isomorphismes : $Is^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

développement 2

2. Groupes diédraux

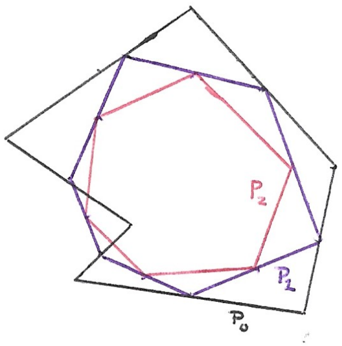
Définition 3.5 On appelle groupe diédral D_{2n}, le groupe des isométries qui préservent un polygone à n côtés, de centre O.

Proposition 3.6 Soit r_0 rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Alors, le groupe des isométries positives conservant le n-polygone est $\langle r_0 \rangle$ cyclique d'ordre n.

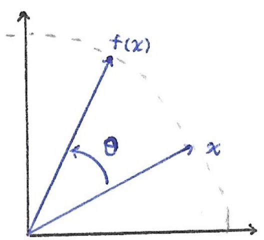
Théorème 3.7 Le groupe D_{2n} est d'ordre $2n$ engendré par r_0 et par un réflexion s (d'ordre 2).

Annexe

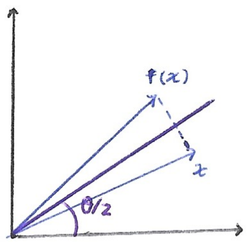
Proposition 1.16



Proposition 2.9



$A \in SO_2(\mathbb{R})$



$A \notin SO_2(\mathbb{R})$

Proposition 2.11