Rombaldi

Szpirglas

Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Dans toute leçon $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Construction de l'exponentielle matricielle

Théorème 1.1 Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{C}$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

(i) si $\rho(A) < R$, la série de terme général $(a_k A^k)_k$ est normalement convergente

(ii) si $\rho(A) > R$, la série de terme général $(a_k A^k)_k$ est divergente

On note alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\rho(A) < R$, $f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$.

Théorème 1.2. Avec les notations précédentes, la matrice $f(A)$ est un polynôme en la matrice A (dont les coefficients dépendent de A).

Application 1.3 [Définition de l'exponentielle] L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est bien définie et continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On l'appelle exponentielle de A et on la note $\exp$.

Remarque 1.4 En prenant $n = 1$, on retrouve la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemples 1.5

- $\exp(0) = I_n$
- $\exp(I_n) = e I_n$
- $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
- si N est nilpotente d'indice $q \geq 1$ alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!}$

Proposition 1.6 Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

(i) $\exp(A) = \lim_{k \to +\infty} (I_n + \frac{1}{k} A)$

(ii) $\exp(A+B) = \lim_{k \to +\infty} \left[\exp(\frac{1}{k} A) \exp(\frac{1}{k} B)\right]^k$

II - Propriétés de l'exponentielle

1. Propriétés calculatoires

Proposition 2.1 Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(PMP^{-1}) = P \exp M P^{-1}$.
En particulier, si deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\exp(M)$ et $\exp(N)$ le sont.

Remarque 2.2. Ceci facilite de $\exp(M)$ lorsque M est trigonalisable ou diagonalisable, puisque le calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonale ou triangulaire est explicite.

Proposition 2.3 Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, les matrices M et N commutent si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp[t(A+B)] = \exp(tA)\exp(tB)$.

Corollaire 2.4 Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.

Corollaire 2.5 Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $[\exp(M)]^{-1} = \exp(-M)$.

Propriétés 2.6 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

(i) $\det(\exp M) = e^{\mathrm{tr}\, M}$

(ii) $(\exp M)^t = \exp(M^t)$

(iii) $\overline{\exp M} = \exp \overline{M}$

Théorème 2.7 [Décomposition de Dunford] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_M soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe alors un unique couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, avec D diagonalisable et N nilpotente, tel que $M = D + N$ et $DN = ND$.

Proposition 2.8 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de décomposition de Dunford $M = D + N$. Alors $\exp(M)$ admet pour décomposition de Dunford $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)[\exp(\;) - I_n]$.

Application 2.9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_M soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors M est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ est diagonalisable.

développement 1

Proposition 2.10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{Sp}(\exp(M)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\, M\}$.

2. Propriétés en tant que fonction

Proposition 2.11 L'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = I_n$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 2.12 Lorsque $n \geq 2$, l'exponentielle n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2.13
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} = I_n = \exp(0)$$

Théorème 2.14 L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. Et, plus précisément, pour tout $M \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(Q(M))$.

Application 2.15 L'espace $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corollaire 2.16 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $M \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in GL_n(\mathbb{C})$ polynomiale en M telle que $X^p = M$.

Théorème 2.17 L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est surjective. Et, pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M^2 = \exp(P(M))$.

← ajout du dvpmt sur la différentielle de l'expo. matricielle

III - Restrictions Remarquables

Définition 3.1 On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. symétriques définies positives) à coefficients réels.

Proposition 3.2 L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Définition 3.3 On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives) complexes.

Proposition 3.4 L'application $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Définition 3.5 À partir du développement en série entière du logarithme complexe, on peut définir la fonction logarithme matriciel par $\ln(I_n + M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\rho(M) < 1$.

Théorème 3.6 En notant $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes à coefficients complexes et $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unipotentes complexes, $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ est bijective d'inverse le logarithme matriciel.

IV - Application aux équations différentielles

Proposition 4.1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'application $\mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $t \longmapsto \exp(tA)$ est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $t \longmapsto A\exp(tA)$.

Proposition 4.2 [EDO homogène à coefficients constants] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = MX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par $X : t \longmapsto \exp((t-t_0)M)X_0$.

Exemple 4.3
$$\begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \text{et} \quad x(0) = y(0) = 0$$

Proposition 4.4 [EDO à coefficients constants] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ application continue. Alors l'unique solution du problème $\begin{cases} X' = MX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par $X : t \in I \longmapsto \exp[(t-t_0)M]X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp[(t-s)M]\,B(s)\,ds$