Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.

Grifone
Rombaldi
Gourdon (devpmt)

Dans toute la leçon, E désigne un espace vectoriel sur K.

I - Théorie de la dimension finie

on pourrait y ajouter la dualité en dimension finie

1. Familles génératrice, libre

Définition 1.1 Une famille de vecteurs $\{x_1, \dots, x_k\}$ de E est dite génératrice, si $E = \mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$.

Définition 1.2 Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie, dans le cas contraire on dit que l'espace est de dimension infinie.

Définition 1.3 Soit $\{x_1, \dots, x_k\}$ une famille d'éléments de E. On dit qu'elle est libre si : $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,k]\!], \lambda_i = 0$. On dit aussi que les vecteurs $x_1, \dots, x_k$ sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

Exemples 1.4

- dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{(1,2,1), (-1,3,1), (-1,13,5)\}$ est liée
- dans K^n, la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est génératrice

Proposition 1.5 Soient $\{x_1, \dots, x_k\}$ une famille libre et $x \in \mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$. Alors la décomposition de x en les x_i est unique.

Définition 1.6 On appelle base une famille à la fois génératrice et libre.

Proposition 1.7 Une famille $\{x_1, \dots, x_k\}$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ se décompose de façon unique sur les x_i.
Le cas échéant, il existe une bijection $E \longrightarrow K^n$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Exemple 1.8 La famille $\{P_0, \dots, P_n\}$, où $P_i : x \longmapsto x^i$, est une base de $\mathbb{R}_n[x]$

Proposition 1.9
(i) Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
(ii) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
(iii) Toute famille contenant une famille liée est liée

À partir d'ici, E sera supposée de dimension finie

2. Notion de base

Théorème 1.10 Soient G famille génératrice de E et L une famille libre inclus dans G. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

Théorème 1.11
(i) De toute famille génératrice, on peut extraire une base.
(ii) Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.12 Si E est engendré par une famille à n éléments, toute famille contenant plus de n vecteurs est une famille liée.

Théorème - Définition 1.13 Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur K.

Théorème 1.14 Si E est de dimension n alors :
(i) Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.
(ii) Toute famille libre ayant n éléments est une base.

Exemples 1.15

- $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$
- $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de K^n

Proposition 1.16 Soit F un sous-espace vectoriel. Alors F est de dimension finie et :
(i) $\dim_K F \leqslant \dim_K E$
(ii) $\dim_K F = \dim_K E \iff E = F$

II. Notion de rang.

Définition 2.1 Le rang d'une famille de vecteurs est défini comme la dimension du sous-espace engendré par cette famille.

Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire, on définit le rang de f comme $\mathrm{rg}\, f := \dim(\mathrm{Im} f)$.

Théorème 2.2 Soient E, E' de dimension finie et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Alors : $\dim E = \mathrm{rg} f + \dim \mathrm{Ker} f$.

Corollaire 2.3. Soient E, E' de même dimension finie et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Contre-exemple 2.4

L'application $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $P \longmapsto P'$ est une application linéaire qui est surjective mais non injective.

Exemple 2.5

L'application d'évaluation en $n+1$ points $\mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est une application linéaire injective donc bijective. D'où l'existence et l'unicité des polynômes d'interpolation de Lagrange.

Définition 2.6 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, on appelle rang de A et on note $\mathrm{rg}\, A$, le rang des vecteurs colonnes de A.

Proposition 2.7 Soient $(e_1, \dots, e_n)$ base de E, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base de E', $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $A = \mathrm{Mat}(f)_{e_i, \varepsilon_j}$. On a alors $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, f$.

Proposition 2.8 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ alors $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, {}^tA$. Autrement dit, le rang d'une matrice est aussi égal au rang de la famille des vecteurs ligne de A.

Proposition 2.9 Le groupe $GL_n(K) \times GL_n(K)$ agit sur $\mathcal{M}_n(K)$ par l'action définie par $(P, Q).A = P^{-1}AQ$. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes et les orbites sont caractérisés par le rang.

Remarque 2.10 Ce résultat permet en pratique, de calculer le rang d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss.

Exemple 2.11

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 13 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 15 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Théorème 2.12 Le rang d'une matrice est la taille de son plus grand mineur non nul.

III. Lien avec les extensions de corps

ajouter théorie des corps finis ?

Définition 3.1 Soient K, L deux corps (commutatifs) tels que $K \hookrightarrow L$, on dit alors que L est une extension de K. On note L/K.

Proposition 3.2 Soit L une extension du corps K, alors L est un K-espace vectoriel.

Définition 3.3 Soit L/K une extension de corps, on définit alors le degré de cette extension comme $[L : K]$ la dimension de L en tant que K-espace vectoriel.

Proposition 3.4 (Multiplicité des degrés) Soient K_1, K_2, K_3 des corps tels que K_1 soit une extension de K_2 et K_2 une extension de K_3. Alors K_1/K_3 est une extension de degré fini si et seulement si $[K_1 : K_2] < +\infty$ et $[K_2 : K_3] < +\infty$. Le cas échéant, on a alors : $[K_1 : K_3] = [K_1 : K_2][K_2 : K_3]$.

Pour la suite, on considèrera L une extension du corps K.

Définition 3.5 Soit $\alpha \in L$, on définit alors $K(\alpha)$ comme étant le plus petit sous-corps de L qui contient K et α.

Définition 3.6 On dit qu'un élément $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que α est transcendant sur K.

Proposition - Définition 3.7 Soit $\alpha \in L$ un nombre algébrique sur K, il existe alors un unique polynôme unitaire $\mu_\alpha \in K[X]$ tel que $I_\alpha = \mu_\alpha . K[X]$. De plus, il s'agit de l'unique polynôme unitaire irréductible de $K[X]$ qui annule α.

Théorème 3.8 Pour tout $\alpha \in L$, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) α est algébrique sur K

(ii) $K(\alpha) = K[\alpha]$

(iii) $[K(\alpha) : K] < +\infty$

Théorème 3.9 Considérons $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments de L algébriques sur K. Alors $\mathcal{A}$ est un sous-corps de L, dénombrable et algébriquement clos si L l'est lui-même.

développement

Remarque 3.10 Lorsque L est infini, le caractère dénombrable de $\mathcal{A}$ permet d'assurer l'existence d'une infinité de nombres de L transcendants sur K.