Leçon 101 : Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Ulmer, Théorie des groupes

Szpirglas

Dans toute cette leçon, G désigne un groupe dont la loi est notée multiplicativement et X désigne un ensemble.

I. La notion d'actions de groupes

1. Définition et premières propriétés

Définition 1.1 On appelle action de G sur X toute application $G \times X \longrightarrow X$, $(g,x) \mapsto g.x$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\forall g,h \in G, \forall x \in X,\quad g.(hx) = (gh).x$

(ii) $\forall x \in X,\ e.x = x$

On dit alors que G opère sur X.

Exemples 1.2

- le groupe des bijections de X, $(\mathfrak{S}(X), \circ)$ opère naturellement sur X
- pour E un espace vectoriel, $GL(E)$ agit sur E
- $(g,x) \mapsto x$ est une action de groupes appelée action triviale

Définition - Théorème 1.3 On définit une correspondance bijective entre les opérations de G sur X et les morphismes $G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$ de la manière suivante : à une action G sur X on associe le morphisme $\varphi : g \in G \longmapsto \varphi_g$ avec $\varphi_g(x) = g.x$.

On dit que φ est le morphisme associé à l'action $X \circlearrowleft G$.

Définition 1.4 On considère une action de G sur X. On définit alors :

- $\forall x \in X,\ O_x := \{g.x \mid g \in G\}$ l'orbite de x
- $\forall x \in X,\ \mathrm{Stab}\, x := \{g \in G \mid g.x = x\}$ le stabilisateur de x

2. Les différentes caractéristiques

Définition 1.5 On considère une action de groupes de G sur X. On dit alors que cette action est :

- (simplement) transitive si pour tous x, y X, il existe un unique $g \in G$ tel que $g.x = y$
- libre si pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}\, x = \{e\}$
- fidèle si l'intersection des stabilisateurs est réduite à l'élément neutre, c'est-à-dire si φ est injective

Conséquence 1.6 Une action fidèle permet d'identifier G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

Application 1.7 On a les isomorphismes exceptionnels suivants :

- $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
- $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$, $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$
- $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$

3. Actions dans le cadre fini

On suppose ici que G et X sont finis.

Proposition 1.8 On considère une action de G sur X. La relation $\sim$ définie sur X par : "$x \sim y$ si x appartient à l'orbite de y" est une relation d'équivalence dont les classes sont les orbites.

En particulier, les orbites forment une partition de X.

Corollaire 1.9 (Formule aux classes) On note $\mathcal{R}$ un système de représentants des orbites de l'action de G sur X. Alors $|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |O_x|$.

Proposition 1.10 Pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}\, x$ est un sous-groupe de G. De plus, l'application $G/\mathrm{Stab}\, x \longrightarrow O_x$, $g\,\mathrm{Stab}(x) \longmapsto g \cdot x$ est bijective.

En particulier, $|G| = |\mathrm{Stab}\, x|\,|O_x|$.

Remarque 1.11 Le stabilisateur n'étant pas nécessairement distingué, il ne s'agit pas en général d'un morphisme de groupes.

Proposition 1.12 (Formule de Burnside) Si G agit sur X, $|X/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}\, g|$.

Application 1.13 En moyenne une permutation de S_n a un seul point fixe

Proposition 1.14 (Cauchy) Soit G fini, alors G admet un élément d'ordre $p \mid |G|$.
└ premier

II. Action de G sur lui-même

1. Action par translation

Proposition 2.1 Un groupe G agit sur lui-même par translation à gauche en posant $G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \longmapsto gh$.

Théorème 2.2 (de Cayley) Tout groupe G fini d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Proposition 2.3 Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. L'opération par translation à gauche de G sur l'ensemble des classes G/H définie par $g \cdot \tilde{g}H = (g\tilde{g})H$ est une action de groupes transitive dont le morphisme associé est de la forme $\varphi : G \longrightarrow S_{[G:H]}$

Exemple 2.4

- $GL_2(K^2) \simeq S_3$ en considérant $K = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

2. Action par conjugaison

Proposition 2.5 Un groupe G agit sur lui-même par conjugaison en posant $G \times G \to G$ $(g, h) \longmapsto ghg^{-1}$.

Définition 2.6 L'orbite de $h \in G$ s'appelle la classe de conjugaison de h. Deux éléments de G dans une même orbite sont dits conjugués.

Le stabilisateur s'appelle le centralisateur de h dans G, noté $C(h)$.

Remarque 2.7 Pour G non trivial, l'action par conjugaison n'est pas libre.

Application 2.8 Le centre d'un p-groupe est non trivial. De plus, tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Application 2.9 (Théorème de Wedderburn)

Lemme Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$ où Φ_k désigne le k-ième polynôme cyclotomique.

Lemme Soient $d, n \in \mathbb{N}^*$ alors $X^d - 1$ divise $X^n - 1$ si et seulement si d divise n. Le cas échéant, $\Phi_n(q)$ divise $\frac{q^n - 1}{q^d - 1}$ pour tout d diviseur strict de n.

Théorème Un anneau (unitaire) dans lequel tout élément non nul est inversible et de cardinal fini est commutatif. Il s'agit donc d'un corps.

développement 1

III. Applications

1. Actions sur les matrices

Définition - Proposition 3.1. L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, M) \longmapsto P^{-1}MP$ définit une action de groupes.

Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles sont semblables.

Définition - Proposition 3.2 L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, M) \longmapsto P^{-1}M$ définit une action de groupes.

Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, N$.

Définition - Proposition 3.3 L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, M) \longmapsto MP$ définit une action de groupe.

Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont la même image.

2. Théorie de Sylow

Définition 3.4 Soient p un nombre premier et G un groupe fini. Un p-sous groupe de G d'ordre maximal est appelé un p-sylow de G.

On note $Syl_p(G)$ l'ensemble des p-sylow de G.

Théorème 3.5 (de Sylow) Soient p un nombre premier et G un groupe fini d'ordre $p^n q$ avec $p \wedge q = 1$. Alors :

(i) les p-sylow de G sont les sous-groupes d'ordre p^n

(ii) les p-sylow sont conjugués. En particulier, si P est un p-sylow de G alors le nombre de p-sylows de G est l'indice $[G : C(P)]$

(iii) notons n_p le nombre de p-sylows de G alors $n_p \mid q$ et $n_p \equiv 1 \mod p$.

Corollaire 3.6 Un p-sous groupe H de G est toujours contenu dans un p-sylow de G. Pour tout p-sylow P de G, il existe $g \in G$ tel que $H \subset gPg^{-1}$.

Théorème 3.7 L'unique groupe simple G d'ordre 60 est le groupe $\mathcal{A}_5$ (à isomorphisme près). développement 2