Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Mansuy
Beck - Malick - P.
Gourdon

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Notion de sous-espace stable

1. Définitions et premières propriétés [Man]

Définition 1.1 Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemples 1.2

$\ker u$, $\operatorname{Im} u$, $\{0\}$ et E sont stables par u

Proposition 1.3 Soit F un s.e.v stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ et par $v \in \mathcal{L}(E)$ alors F est stable par $u+v$ et par $u \circ v$.

Proposition 1.4 Soit $v \in GL(E)$ et soit F stable par u, alors $v(F)$ est stable par l'endomorphisme $v \circ u \circ v^{-1}$.

Exemple 1.5

Soit ρ une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par x et d'angle θ, et soit f isométrie. Alors $f \circ \rho \circ f^{-1}$ est une rotation d'axe dirigé par $f(x)$.

Proposition 1.6 Un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si dans toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où $\mathcal{B}_{|F} = (e_1, \dots, e_r)$ est une base de F, la matrice de u est de la forme : $\begin{pmatrix} \times & \times \\ (0) & \times \end{pmatrix}$.

Définition 1.7 Si F est un s.e.v. stable par u alors l'endomorphisme induit par u sur F est $u_F := F \longrightarrow F, x \longmapsto u(x) \in \mathcal{L}(F)$.

Remarque 1.8 On a : $u_F \neq u_{|F}$ car $u_{|F} : F \longrightarrow E$.

2. Recherche de sous-espaces stables [Man]

Lemme 1.9 Dans $\mathbb{C}$, il existe toujours un vecteur propre donc un sous-espace stable.

Proposition 1.10 Soient u, v des endomorphismes de E qui commutent alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Corollaire 1.11 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.

Application 1.12 Les sous-espaces propres et caractéristiques de u sont stables par u.

Remarque 1.13 Par définition, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est le plus grand s.e.v. pour lequel l'endomorphisme induit soit une homothétie de rapport λ.

Proposition 1.14 Soit F s.e.v de E. Alors F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^t.

II - Stabilité et réduction

1. Lemme des noyaux et conséquences [BMP]

Proposition 2.1 (lemme des noyaux) Soient $(P_1, \dots, P_N)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. On note $P = P_1 \dots P_N$. On obtient alors :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{n=1}^{N} \ker P_n(u).$$

Application 2.2 (décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé, il existe un unique couple (d,n) avec d diagonalisable, n nilpotent tel que $u = n + d$, et $d \circ n = n \circ d$.

Corollaire 2.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors M est diagonalisable si et seulement si e^M l'est.

développement 1

Application 2.4 Écrivons $\pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\alpha_k}$ décomposition en facteurs irréductibles. Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker P_k^{\alpha_k}(u)$

Théorème 2.5 Les assertions suivantes sont équivalentes:

- u est diagonalisable
- il existe un polynôme annulateur de u à racines simples
- π_u est scindé à racines simples

Exemple 2.6
tout projecteur est diagonalisable

Théorème 2.7 Les assertions suivantes sont équivalentes:

- u trigonalisable
- il existe un polynôme annulateur scindé
- π_u est scindé
- χ_u est scindé

2. Réduction simultanée [Gou][BMP]

Définition 2.8 Une famille d'endomorphisme $(u_1, \dots, u_N)$ d'un espace vectoriel E est dite codiagonalisable (resp. cotrigonalisable) s'il existe une base de E dans laquelle chacun des u_k est diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Proposition 2.9 Une famille $(u_k)_{k \in [\![1,N]\!]}$ d'endomorphismes diagonalisables est codiagonalisable si et seulement si pour tous $i,j \in [\![1,N]\!]$, u_i et u_j commutent.

Exemple 2.10 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Alors $\Theta : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AMB$ est diagonalisable.

Application 2.11 Supposons que car $\mathbb{K} \neq 2$, alors $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K})$ si et seulement si $n = m$.

Proposition 2.12 Une famille $(u_1, \dots, u_N)$ d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux est cotrigonalisable.

Lemme 2.13 Si u est trigonalisable et si F est stable par u alors u_F est trigonalisable.

développement 2

Proposition 2.14 Si u, v sont cotrigonalisables alors $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Contre-exemples 2.15

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

III. Sous-espaces cycliques [Man]

Définition 3.1 Soit $x \in E$. Le sous-espace cyclique de u associé à x, est le plus petit sous-espace stable de u contenant x. On le note $E_{u,x}$ ou E_x.

Proposition 3.2 Soit $x \in E$. Alors $E_{u,x} = \mathrm{Vect}\left((u^k(x))_{k \in \mathbb{N}} \right)$.

Proposition 3.3 Soit $x \in E$. Alors $\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x} =: k$ et on obtient alors que $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est une base de $E_{u,x}$.

Définition 3.4 Un endomorphisme u est dit cyclique, s'il existe $x \in E$ tel que $E = E_{u,x}$.

Proposition 3.5 Si $\deg \pi_u = n$ alors u est cyclique.

Définition 3.6 La matrice compagnon du polynôme $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est la matrice C_P donnée par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarque 3.7 Un endomorphisme u est cyclique si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon.

Proposition 3.8 On a : $\chi_{C_P} = P$.

Application 3.9 (théorème de Cayley-Hamilton) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors χ_u est un polynôme annulateur de u.