Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Beck, Malick, Peyré
Dreveton, Lhabouz
Gourdon Alg. (2.11)
Isenmann Pecatte (dev1)

Dans toute la leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

I - Espaces préhilbertiens

1. Propriétés remarquables

Théorème 1.1 (Inégalités de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$. De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Corollaire 1.2 L'application $\|.\| := \sqrt{\langle .,.\rangle}$ définit une norme sur E.

Application 1.3 L'application $E \times E \longrightarrow \mathbb{K}, (x,y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ est continue.

Proposition 1.4 Soient $x, y, z \in E$. Alors :
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle$
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ identité du parallélogramme

Théorème 1.5 (Pythagore) Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$. On a : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. De plus, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est vérifiée.

Contre-exemple 1.6
sur $\mathbb{C}$, $\|1+i\|^2 = \|1\|^2 + \|i\|^2$ mais $\langle 1, i\rangle = -i \neq 0$

2. Orthogonalité

Définition 1.7 Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A, $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0\}$

Remarque 1.8 Par linéarité et continuité des fonctions $y \longmapsto \langle x, y\rangle$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.9 Soient $A, B \subset E$. On a alors :
- $B \subset A \Rightarrow A^\perp \subset B^\perp$
- $A^\perp = (\operatorname{vect} A)^\perp = \overline{A}^\perp$
- $A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{vect} A}$
- $\overline{\operatorname{vect} A} \cap A^\perp = \{0\}$

Définition 1.10 Une famille $(x_i)_i$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour tous $i \neq j \in I$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.
On dit qu'elle est orthonormée si de plus, pour tout $i \in I$, $\langle x_i, x_i\rangle = 1$.

3. Espace de Hilbert

Définition 1.11 On dit que E est un espace de Hilbert si E est complet pour la norme issue du produit scalaire.

Exemples 1.12
- l'espace $(L^2, \|.\|_2)$ est un Hilbert
- soit I non vide, $(\ell^2(I), \|.\|_{\ell^2})$ est un Hilbert

II - Propriétés des espaces de Hilbert

1. Théorèmes de projection et conséquences

On considère $(H, \|.\|)$ un espace de Hilbert.

Théorème 2.1 (projection sur un convexe fermé) Soit C un convexe fermé (non vide) de H.
Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de C, qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé projection de x sur C et noté $p_C(x)$.
L'élément $p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et pour tout $y \in C$, $\operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle) \leqslant 0$.

Application - Définition 2.2 Soit C un convexe fermé non vide de H. L'opérateur de projection $p_C : x \longmapsto p_C(x)$ est bien défini et cette application est 1-lipschitzienne.

Conséquence 2.3 Si F est un fermé de H, $F \oplus F^{\perp} = H$. On en déduit alors la retraduction suivante :

Théorème 2.4 (projection sur un espace fermé) Soit F un espace vectoriel fermé de H. Pour $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique élément $p \in H$ qui vérifie $p \in F$ et $x - p \in F^{\perp}$.

De plus, $p_F : H \longrightarrow F$ est linéaire, continue et surjective.

Corollaire 2.5 Soit F un sous-espace vectoriel de E alors $\overline{F} = H \iff F^{\perp} = \{0\}$.

Application 2.6 Construction de l'espérance conditionnelle comme projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Théorème 2.7 (de représentation de Riesz) Soit φ une forme linéaire continue sur H, il existe alors un unique $y \in H$ tel que $\varphi = \langle \cdot, y \rangle$. De plus, $\|\varphi\|_{H'} = \|y\|$.

Définition 2.8 Sous les hypothèses précédentes, on peut définir l'automorphisme adjoint de $u \in \mathcal{L}_c(H)$, u^*, vérifiant : $\forall x, y \in H$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

Une autre application :

Théorème 2.9 Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe continue et coercive. Alors il existe $a \in H$ tel que $J(a) = \inf_H J$

développement 1

2. Bases hilbertiennes

Définition 2.10 On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ de H est une base hilbertienne de H si elle est orthonormée et totale (i.e. $H = \overline{\mathrm{vect}(e_i, i \in I)}$).

Théorème 2.11 (orthogonalisation de Gram-Schmidt) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de H. Il existe une unique base orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ telle que pour tout k, $u_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Théorème 2.12 (admis) Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

Théorème 2.13 Soit H un Hilbert et $(e_n)_n$ une famille orthonormée de H. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $(e_n)_n$ est une base hilbertienne
- $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$
- $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ formule de Parseval
- $(e_n, n \in \mathbb{N})^{\perp} = \{0\}$

III. Exemples de Hilbert

1. L'espace $L^2(\mathbb{T})$

On considère l'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \overline{g}$

Proposition 3.1 Pour tout n, on note $e_n : t \longmapsto e^{int}$. Alors $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 3.2 Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle| = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Application 3.3 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

2. L'espace $L^2(I, \rho)$

Définition 3.4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids sur I toute fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que pour tout n, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$. On considère $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la densité $\rho\,dx$. Il s'agit d'un Hilbert.

Théorème 3.5 Il existe une famille orthonormale $(P_n)_n$ de $L^2(I, \rho)$ vérifiant $\deg P_n = n$.

Théorème 3.6 S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x)\,dx < +\infty$ alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne.

développement 2

Exemples 3.7

- polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$, $\rho : x \longmapsto e^{-x^2}$ $\Rightarrow$ $P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
- polynômes de Legendre : $I = [-1, 1]$, $\rho = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$