Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Gourdon
Dantzer
Hirsch Lacombe (III 1)
Isenmann – Pecatte (dev 2)

Dans la leçon (X, d) désigne un espace métrique.

I - La notion de compacité

1. Définitions, caractérisations

Définition 1.1 (Propriété de Borel - Lebesgue) L'espace (X, d) est dit compact si de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Exemples 1.2

- tout espace métrique fini est compact
- $(\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas compact car $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$

Proposition 1.3 Ceci équivaut au fait que de toute famille de fermés de X d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Conséquence 1.4 Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides dans un compact (X, d) alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Théorème 1.5 L'espace (X, d) est compact si et seulement si de toute suite de points de X, on peut en extraire une sous-suite convergente dans X.

Exemple 1.6

$\forall a < b \in \mathbb{R}$, $([a, b], |.|)$ est compact

2. Propriétés relatives aux compacts

Proposition 1.7 Toute partie compacte, de (X, d) quelconque, est fermée bornée.

Théorème 1.8 (Tychonoff) Un produit fini ou dénombrable d'espaces compacts est un espace métrique compact.

Proposition 1.9 Un espace métrique compact est complet.

Proposition 1.10 Une réunion finie de parties compactes est compacte et une intersection quelconque de parties compactes est compacte.

Proposition 1.11 Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.

Théorème 1.11 Supposons (X, d) compact. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X converge vers x si et seulement si x est la seule valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

Contre-exemple 1.12

Ceci est faux sur $\mathbb{R}$ non compact : $x_{2n} = 2n$ et $x_{2n+1} = 0$.
La suite $(x_n)_n$ diverge (sans limite) et admet 0 comme unique point d'adhérence.

II. Utilisation de la compacité pour les fonctions

1. Cadre général

Proposition 2.1 Supposons (X, d) compact. Soient (Y, d') un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors $f(X)$ est compacte.

Remarque 2.2 On obtient sous ces hypothèses que l'image d'un fermé de X par f est un fermé de Y. Ce qui est faux en général.

Corollaire 2.3 Soit $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ une application continue bijective. Si (X, d) est compact alors $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue. Autrement dit, f est un homéomorphisme.

Proposition 2.4 Soient (X, d) compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 2.5 (de Heine) Soient (X,d), (Y,d') espaces métriques, avec (X,d) compact, et $f : X \longrightarrow Y$ continue. Alors f est uniformément continue.

Théorème 2.6 (de point fixe) Supposons (X,d) compact. Soit $f : X \longrightarrow X$ vérifiant pour tous $x \neq y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe α.

De plus, soit $x_0 \in X$, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, converge vers α.

2. Le cadre $C^0([a,b], \mathbb{R})$

Théorème 2.7 (de Rolle) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application 2.8 Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet $n+1$ zéros et est n fois dérivable alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Corollaire 2.9 (accroissements finis) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Théorème 2.10 (de Weierstrass) Les fonctions polynomiales sur $[a,b]$ sont denses dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$.

Lemme 2.11 Soit $f \in C^0_c(\mathbb{R})$ et $(\varrho_n)_n$ une approximation de l'identité. Alors la suite $(f \star \varrho_n)_n$ converge uniformément vers f.

III - Autres applications de la compacité

1. Théorème d'Ascoli

On suppose dans ce paragraphe que (X,d) est compact.

Définition 3.1 Une famille $\mathcal{F} \subset C^0(X)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ si elle vérifie la condition : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in X$, $d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Elle est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.

Définition 3.2 Une famille $\mathcal{F} \subset C^0(X)$ est dite uniformément équicontinue si elle vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X$, $d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Proposition 3.3 Une partie de $C^0(X)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.

Théorème 3.4 (Ascoli) Une partie de $C^0(X)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

2. Compacité et espace vectoriel normé

Proposition 3.5 Soit E un espace vectoriel normé. Alors une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Corollaire 3.6 Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un compact si et seulement si c'est un segment.

Théorème 3.7 Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.

Ellipsoïde de John - Löwner

Proposition 3.8 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En notant $E_S = \{x \in \mathbb{R}^n, {}^t x S x \leqslant 1\}$, $\mu(S) = (\det S)^{-1/2}$ et B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on a : $\mathrm{Vol}(E_S) = \mu(S)\, \mathrm{Vol}(B)$.

Proposition 3.9 La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 3.10 Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

développement 2