Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.

I - Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1. Définition et premières propriétés

Définition 1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, comme la fonction $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$.

Remarque 1.2 Cette fonction est bel et bien définie sur $\mathbb{R}$ par le caractère intégrable de f et le fait que $|e^{ix\xi}| = 1$ pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Exemples 1.3
- soit $a > 0$ alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]})(\xi) = 2a\,\mathrm{sinc}(a\xi)$
- soit $b > 0$ alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-b|\cdot|})(\xi) = \dfrac{2b}{b^2 + \xi^2}$

Proposition 1.4 L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$ est une application linéaire continue de norme 1.

Lemme 1.5 (de Riemann - Lebesgue) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{|\xi| \to +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Conséquence 1.6 On a $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R})$, et pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Propriétés de la transformée de Fourier

Proposition 1.7 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :
- $\widehat{\tau_a(f)} = e^{ia\cdot}\hat{f}(\cdot)$
- si $a \neq 0$, $\widehat{f(a\cdot)} = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{\cdot}{a}\right)$
- $\widehat{f(\cdot)e^{ia\cdot}} = \hat{f}(\cdot + a) = \tau_{-a}\hat{f}$
- $\hat{f}(0) = \int f\,d\lambda$

Proposition 1.8 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f * g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$.

Application 1.9 L'anneau L^1 n'admet pas d'unité pour la convolution.

Théorème 1.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $m_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^k$.
- si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $m_k f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\hat{f}^{(k)} : \xi \longmapsto (-i)^k\,\widehat{m_k f}$
- si $f \in C^n \cap L^1$ et si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)} \in L^1$ alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\widehat{f^{(k)}} = i^k m_k \hat{f}$. En particulier, $\hat{f} = \underset{\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{|\xi|^n}\right)$

Conséquence 1.11 Ainsi, plus f tend vite vers 0 en $\pm\infty$ plus $\hat{f}$ est régulière et plus f est régulière plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 en $\pm\infty$.

3. Théorème d'inversion

Lemme 1.12 Soit $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ alors $\hat{g} : \xi \longmapsto e^{-\xi^2/2}$.

Théorème 1.13 (d'inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a alors :

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{it\xi}\, d\xi \quad \text{p.p.}$$

Corollaire 1.14 La transformation de Fourier est injective.

Application :

Définition 1.15 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que pour tout n, $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ. Il s'agit d'un espace de Hilbert.

Théorème 1.16 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, ρ une fonction poids et $(P_n)_n$ la famille orthonormale de $L^2(I,\rho)$ obtenue par Gram-Schmidt sur $(x^n)_n$.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int e^{\alpha |x|} \rho(x)\,dx < +\infty$. Alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

développement 1

II - Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Lemme 2.1 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\int \hat{f} g \, d\lambda = \int f \hat{g} \, d\lambda$.

Théorème 2.2 (Plancherel) Il existe un unique isomorphisme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})}$. De plus, pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2}$.

Proposition 2.3 On obtient :

- $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi \, \check{id}$ où $\check{id} : f \longmapsto f(-\cdot)$
- $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g) = 2\pi \, \mathcal{F}(fg)$

Définition 2.4 L'isométrie $\mathcal{F}$ est appelée transformée de Fourier - Plancherel.

Remarque 2.5 Une méthode pour calculer $\mathcal{F}(f)$ est de calculer $\mathcal{F}(f \mathbb{1}_{[-n,n]})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et de faire tendre n vers $+\infty$.

III - La transformation de Fourier en probabilité

Définition 3.1 On appelle fonction caractéristique de mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\phi_\mu : t \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} \, d\mu(x)$.
Par extension, on appelle fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^d$ la fonction $\phi_X(t) = \phi_{\mathbb{P}_X}(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}]$.

Proposition 3.2 Si X admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue) alors

$$\phi_X = \widehat{f(-\cdot)} = \hat{f}(-\cdot).$$

Théorème 3.3 La fonction caractéristique caractérise la loi.

Proposition 3.4 Soient X vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
Alors $\phi_{AX+b} : t \in \mathbb{R}^n \longmapsto e^{i\langle b, t \rangle} \phi_X(A^* t)$

Exemples 3.5

- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: $\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $\phi_X(t) = e^{imt} e^{-t^2\sigma^2/2}$
- $X \sim \mathcal{C}(a,b)$: $\phi_X(t) = e^{iat} e^{-b|t|}$
- $X \sim \mathcal{B}(p)$: $\phi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

développement 2

Définition 3.6 Soient $(X_n)_n$, X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si pour tout $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 3.7 (Lévy) - admis On a alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $(\phi_{X_n})_n$ converge simplement vers ϕ_X.

Conséquence 3.8 (Théorème central limite) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. iid admettant un moment d'ordre 2 fini. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_1 > 0$. Alors

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$