Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

I. Définitions et premières propriétés

1. Fonctions 2π-périodiques

Notation 1.1 On note $C^0_m(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π périodiques et continues par morceaux. On note $C^0(\mathbb{T})$ de telles applications qui ~~sont~~ continues.

$\mathbb{T}$ désigne le tore.

Remarque 1.2 Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $C^0_m(\mathbb{T})$ si et seulement si f est périodique de période 2π et $f_{|[0,2\pi]}$ est continue par morceaux.

Proposition 1.3 Soit $f \in C^0_m(\mathbb{T})$ alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f sur une période, on la notera $\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt$.

Théorème 1.4 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in C^0_m(\mathbb{T})$ et $a < b \in [-\infty,+\infty]$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\,dt = 0$.

Définition 1.5 On appelle polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ toute fonction de la forme $x \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ où $c_n \in \mathbb{C}$.

On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la forme $c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$.

2. Définition d'une série de Fourier

Définition 1.6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \in C^0_m(\mathbb{T})$. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes définis par : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,dt$.

On appelle coefficients de Fourier réels ceux définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Définition 1.7 On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} \quad \text{ou encore} \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

Proposition 1.8 Soient $f \in C^0_m(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$ pour $f_\sigma : x \longmapsto f(-x)$
- $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
- $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$ où $\tau_a f : x \longmapsto f(x-a)$
- $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)\, e_n$

Proposition 1.9 Soit $f \in C^0 \cap C^1_m(\mathbb{T})$. Alors $f' \in C^0_m(\mathbb{T})$ et $c_n(f') = in\,c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.10 Si f est paire, alors $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.11 L'application $f \in C^0_m(\mathbb{T}) \longmapsto (c_n(f))_n$ est linéaire continue à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z})$.

Corollaire 1.12 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in C^k_m(\mathbb{T}) \cap C^{k-1}$. Alors : $c_n(f) = \underset{\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$.

II. Types de convergence

1. Formules de Parseval

Proposition 2.1 On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $C^0_m(\mathbb{T})$ qui vérifient $f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}$ muni de $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\bar{g}(t)\,dt$ est un espace préhilbertien.

Remarque 2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ est la projection de f sur $\mathrm{Vect}(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$

Corollaire 2.3 (Inégalité de Bessel) Soit $f \in C^0_m(\mathbb{T})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$

Théorème 2.4 (Formule de Parseval) Soit $f \in C^0_m(\mathbb{T})$. Alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$.

2. Noyaux de Dirichlet et de Fejer

Définition 2.5 On appelle noyau de Dirichlet la suite $(D_n)_n$ de polynômes trigonométriques définie par : $D_n : x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

On appelle noyau de Fejer la suite $(K_n)_n$ de polynômes trigonométriques définie par $K_n : x \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

Proposition 2.6 Pour tout $f \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\pi} D_n \star f = S_n(f)$ et $\frac{1}{2\pi} K_n \star f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$.

Théorème 2.7 (de Fejer) La suite $(\frac{1}{2\pi} K_n)_n$ est une approximation de l'unité 2π-périodique.

Corollaire 2.8 On obtient :

- si $f \in C^0(\mathbb{T})$, $\frac{1}{2\pi} K_n \star f \xrightarrow{\|.\|_\infty} f$
- si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\frac{1}{2\pi} K_n \star f \xrightarrow{\|.\|_p} f$

Corollaire 2.9 Soient $f, g \in C^0_m(\mathbb{T})$ vérifiant $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors $f = g$.

3. Convergence simple

Théorème 2.10 (de Dirichlet) Soit $f \in C^1_m(\mathbb{T})$ alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} : x \longmapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Corollaire 2.11 Soit $f \in C^1_m(\mathbb{T}) \cap C^0(\mathbb{T})$ alors $S_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{c.s} f$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.12 L'hypothèse de continuité ne suffit pas.

Contre-exemple 2.13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$.

On pose pour tout $n, k \in \mathbb{N}$,

$a_{n,k} = \int_0^\pi \cos nt \,.\, \sin \frac{2k+1}{2} t \, dt$ et $s_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k}$

On a alors :

1) f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$

2) pour tous n, k, $s_{n,k} \geqslant 0$ et $s_{k,k} > \frac{\log k}{2}$

3) la série de Fourier de f diverge en 0

III - Applications

Application 3.1 À partir de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, définie par $f : t \in [0,\pi] \longmapsto \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$, on obtient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{16} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Application 3.2 (Résolution de l'équation de la chaleur) Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ de coefficients de Fourier $(d_n)_n$. Il existe alors une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall t > 0$, $u(t,.)$ 2π-périodique

(ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ bien définies et continues

(iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

(iv) $u(t,.) \xrightarrow[t \to 0]{} u_0$ dans L^2

On a alors $u \in C^\infty$.