Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, on se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On considère $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Et dans le cas où $(S_n)_n$ converge, on note $R_n = S - S_n$, les restes de la série.

I. Critères de convergence des sommes partielles

1. Observations générales

Remarque 1.1 Très rares sont les cas où l'on est capable de calculer explicitement des séries, en dehors des cas suivants :

- séries arithmétiques : $u_n = na$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge $\iff a = 0$
- séries géométriques : $u_n = q^n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge $\iff |q|<1$ et : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
- télescopage : $u_n = v_{n+1} - v_n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge $\iff (v_n)_n$ converge

Il faut donc étudier la convergence des séries sans pouvoir nécessairement en donner la limite.

Proposition 1.2 Si $\sum_n u_n$ converge alors $(u_n)_n$ tend vers 0.

Proposition 1.3 La série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si (R_n) tend vers 0.

Proposition 1.4 Le corps $\mathbb{K}$ étant complet, la série converge si et seulement si $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exemple 1.5
la série de terme général $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est divergente.

Définition 1.6 On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument lorsque $\sum_n |u_n|$ converge.

Proposition 1.7 Une série absolument convergente est convergente.

Exemple 1.8
pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente

2. Séries à termes positifs

Théorème 1.9 Toute suite réelle croissante converge si et seulement si elle est majorée. Alors une série $\sum_n u_n$ à termes positifs converge si et seulement si $(S_n)_n$ est majorée.

Théorème 1.10 (de comparaison) Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ des suites positives. On a :

- si pour tout n, $u_n \leq v_n$: si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge, si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
- si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature
- si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ alors $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge

Application 1.11 La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.

Application 1.12 On note $\zeta : s\in]1,+\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers dans l'ordre croissante. On a alors pour tout $s>1$, $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1-\frac{1}{p_k^{\,s}})$. On en déduit que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge (vers $+\infty$). développement 1

Proposition 1.13 Supposons que $(u_n)_n$ soit à valeurs strictement positives.

- (Règle de d'Alembert) supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite λ.
  - si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge
  - si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge
- (règle de Cauchy) supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ admette une limite λ.
  - si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge
  - si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge

Contre-exemple 1.14
le cas $\lambda = 1$ ne nous dit rien : $\frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n = +\infty$, et, $\frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge

3. Séries réelles sans signe

Théorème 1.15 (critère des séries alternées) partie 1 Soient $(a_n)_n$ une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée, $\sum_n (-1)^n a_n$ converge.

Exemple 1.16

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente mais est convergente (on dit qu'elle est semi-convergente)

Théorème 1.17 (règle d'Abel) Supposons que pour tout n, $u_n = \alpha_n v_n$ où $(\alpha_n)_n$ est une suite positive décroissante qui tend vers 0 et $\sum_n v_n$ est bornée. Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Remarque 1.18 Le théorème 1.15 est un corollaire du théorème 1.17.

Exemple 1.19

une série de la forme $\sum_n \alpha_n e^{in\theta}$ avec $(\alpha_n)_n$ décroissante et tendant vers 0, et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, est convergente.

II - Comportement asymptotique des sommes partielles et restes

1. Sommation des relations de comparaison

Théorème 2.1 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs vérifiant $u_n \sim v_n$.

Alors :

- si $\sum u_n$ converge, $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$
- si $\sum u_n$ diverge, $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$

Exemple 2.2

considérons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \log n + \gamma + o(1)$

Théorème 2.3 On considère deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Supposons que $v_n = o(u_n)$ (resp. $v_n = O(u_n)$). Alors :

- si $\sum u_n$ converge, $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ resp. $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$
- si $\sum v_n$ diverge, $\sum_{k=0}^{n} v_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ resp. $\sum_{k=0}^{n} v_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$

2. Comparaison série-intégrale

Théorème 2.4 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante. Alors, la série $\sum_n f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ existe.

Contre-exemple 2.5

- $\int_0^{+\infty} \sin(2\pi x)\,dx$ diverge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(2\pi n)$ converge

Application 2.6 (séries de Bertrand) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Application 2.7

- $\forall \alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1}}$
- $\forall \alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

3. Autre technique d'estimation du reste

Théorème 2.8 (critère des séries alternées) partie 2 On se place sous les hypothèses du théorème 1.15. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

III - Les séries de Fourier au service du calcul explicite

Théorème 3.1 (égalité de Parseval) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,dt$.

Théorème 3.2 (Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique et C^1 par morceaux. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en x vers $\dfrac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$.

Application 3.3

À partir de la fonction $f : x \in [-\pi, \pi] \longmapsto 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ périodisée, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Contre-exemple 3.4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [0, \pi], \ f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$$

On posant :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \ a_{n,k} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\frac{(2k+1)t}{2}\, dt \quad \text{et} \quad s_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k}$$

on a : $s_{n,k} \geqslant 0$ et $s_{k,k} \geqslant \frac{1}{2} \log k$

On en déduit que la série de Fourier de f diverge en 0.

développement 2