Leçon 215 : Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Dans cette leçon, on considère $n, p \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

I. Applications différentiables

1. Notion de différentiabilité

Définition 1.1 Une application $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite différentiable en $x_0 \in \Omega$ s'il existe une application $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que : $f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \longrightarrow 0$.

Proposition 1.2 Sous les hypothèses précédentes, si une telle fonction L existe, elle est unique.

On l'appelle différentielle de f en x_0 et on la note $df(x_0)$.

Définition 1.3 On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable sur Ω si elle est différentiable en tout point $x \in \Omega$.

Exemples 1.4

- soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ alors L est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $dL(x) = L$
- soit $f : M \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto M^{-1}$ alors f est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, tout $\|H\| < 1$, $df(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$
- soit $g : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|x\|_2^2$ alors g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $dg(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$

2. Propriétés

Proposition 1.5 Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x_0 \in \Omega$ alors f est continue en x_0.

Proposition 1.6 Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ des applications différentiables en $x_0 \in \Omega$.
Alors :

- $f+g$ est différentiable en x_0 et $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable en x_0 et $d(\lambda f)(x_0) = \lambda df(x_0)$

Proposition 1.7 Soient Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Ω_2 un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et deux applications $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^q$ vérifiant $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Si f est différentiable en $x_0 \in \Omega_1$ et g est différentiable en $f(x_0)$ alors $g \circ f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable en x_0 et $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$

Exemple 1.8
En notant $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto A^2$ et $g : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \operatorname{tr} A$,

$df(A) : H \longmapsto AH + HA$ et $dg(A) : H \longmapsto \operatorname{tr} H$

Donc :
$d(g \circ f)(A) : H \longmapsto \operatorname{tr}(AH + HA)$

Remarque 1.9 Si $n = 1$, cette formule s'écrit $(g \circ f)'(x_0) = dg(f(a))(f'(a))$

Corollaire 1.10 Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables en $x_0 \in \Omega$ alors fg est différentiable en x_0 et $d(fg)(x_0) = df(x_0).\, g + f.\, dg(x_0)$.

Exemple 1.11
Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\operatorname{ad} X : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto XH - HX$.
En résolvant :

$f'(t) = Af(t)$, $f(0) = H$ et $g'(t) = e^{tA}H$, $g(0) = 0$ avec $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

on montre que :

$$d\exp(X)(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\operatorname{ad} X)^k(H)}{(k+1)!}$$

Proposition 1.12 Soient $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, différentiables sur Ω. On suppose que les f_k convergent simplement sur Ω et les df_k convergent uniformément sur Ω.
Alors $\lim_k f_k$ est différentiable sur Ω et $d(\lim_k f_k) = \lim_k df_k$.

3. Dérivées partielles

Définition 1.13 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. On dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice $i \in [\![1,n]\!]$, si $t \longmapsto f(a+te_i)$ est dérivable en $t=0$.

On note alors cette dérivée $\partial_i f(a)$.

Remarque 1.14 Il se peut que toutes les dérivées partielles de f existent en a et que f ne soit pas différentiable en a, ni même continue en a.

Toutefois, si f est différentiable en a et que toutes les dérivées partielles de f en a existent, on a : $df(a)(h) = \sum_{k=1}^{n} h_k\, df(a)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} h_k\, \partial_k f(a)$

Définition 1.15 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable. On écrit f sous la forme $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit alors la matrice jacobienne de f en x_0 : $Jf_{x_0} := (\partial_j f_i(x_0))_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ de sorte que $df(x_0)(h) = Jf_{x_0} \cdot h$

Définition 1.16 Lorsque $p=1$, on définit le gradient de f en $x_0 \in \Omega$ par $\nabla f(x_0) = {}^tJf_{x_0} = \begin{pmatrix}\partial_1 f(x_0)\\ \vdots \\ \partial_n f(x_0)\end{pmatrix}$ de sorte que $df(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0), h\rangle$

Théorème 1.17 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application dont toutes les dérivées existent et sont continues en un point $x_0 \in \Omega$. Alors f est différentiable en x_0.

II. Différentielle d'ordre 2

1. Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est deux fois différentiable en $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable sur un voisinage de x_0 et si df est différentiable en x_0.

On la note alors $d^2f(x_0)$

Théorème 2.2 (Schwarz) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fois différentiable en $x_0 \in \Omega$. Alors l'application bilinéaire $d^2f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est symétrique.

Définition 2.3 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $x_0 \in \Omega$. On définit la matrice hessienne de f en x_0 par $Hf_{x_0} := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial_i \partial_j}\right)_{i,j}$ de sorte que l'on ait : $d^2f(x_0)(h,k) = {}^th\, Hf_{x_0} h$.

Remarque 2.4 La matrice hessienne est symétrique.

2. Théorème des accroissements finis et conséquences

Remarque 2.5 Si $p>1$, l'égalité des accroissements finis n'est pas vérifiée.

Contre-exemple 2.6

$t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos t, \sin t)$

Lemme 2.7 Soient $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Si pour tout $t \in]a,b[$, $\|F'(t)\| \leq g'(t)$ alors $\|F(b) - F(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Théorème 2.8 (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et soient $a,b \in \Omega$ tels que $[a,b] \subset \Omega$. Si f est continue sur $[a,b]$, et différentiable sur $]a,b[$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{]a,b[} \|df(z)\| \cdot \|b-a\|$.

Application 2.9 Si Ω est un ouvert connexe et $df(x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.

Contre-exemple 2.10

$f :]0,1[\cup]2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ sur }]0,1[\\ 1 \text{ sur }]2,3[\end{cases}$

Donc l'hypothèse connexe est essentiel.

Théorème 2.11 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^2, $x \in \Omega$ et h tel que $[x, x+h] \subset \Omega$. Alors

(i) $f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(x) + \int_0^1 (1-t)\, d^2f(x+th)(h,h)\, dt$

(ii) $f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2} d^2f(x)(h,h) + o(\|h\|^2)$

III - Théorème d'inversion locale, des fonctions implicites

Théorème 3.1 (inversion locale) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 telle que $df(x_0)$ est inversible pour un élément $x_0 \in \Omega$. Alors il existe un voisinage U de x_0 dans Ω et un voisinage V de $f(x_0)$ tels que $f|_U : U \longrightarrow V$ soit un C^1 - difféomorphisme.

Exemple 3.2

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un C^1-difféomorphisme local

Corollaire 3.3 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que pour tout $x \in \Omega$, $df(x)$ soit inversible. Alors :

(i) f est une application ouverte

(ii) si f est injective alors $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ est un C^1-difféomorphisme

Application 3.4

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Théorème 3.5 (fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(x_0, y_0) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1. On suppose que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_2 f(x,y)$ est inversible. Alors, il existe un voisinage V de x_0, un voisinage W de y_0 et une fonction $\phi : V \longrightarrow W$ de classe C^1 telle que $\{(x,y) \in V \times W \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, \phi(x)) \mid x \in V\}$.

Application 3.6

Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine de P_0.

Il existe un voisinage U de P_0, un voisinage V de x_0 et $\phi : U \longrightarrow V$ telle que :

$P(x) = 0 \iff x = \phi(P)$