Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Gourdon
Beck-Malick-P.
Appel
Isenmann P. (devs)

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

I - Généralités [Gou]

Définition 1.1 Une partie A de E est dite convexe si pour tous $a, b \in A$ et tout $t \in [0,1]$, $(1-t)a + tb \in A$.

Définition 1.2 Une application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite :

- convexe si : $\forall a, b \in A$, $\forall t \in [0,1]$, $f[(1-t)a+tb] \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$
- strictement convexe si : $\forall a \neq b \in A$, $\forall t \in]0,1[$, $f[(1-t)a+tb] < (1-t)f(a) + tf(b)$
- concave si $-f$ est convexe

Remarque 1.3 Dans le cadre $A \subset \mathbb{R}$, cela signifie que le graphe de f est en-dessous de ses cordes.

Théorème 1.4 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe
- f' est croissante
- la courbe de f est au dessus de ses tangentes

Exemple 1.5

- exp est convexe
- log est concave
- $x \longmapsto x^3$ est ni convexe ni concave

Proposition 1.6 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, $f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

Application 1.7 (inégalité arithmético-géométrique) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors : $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Application 1.8

- $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|\sin x| \leqslant |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp x \geqslant 1 + x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x + 1$

II - Applications dans des espaces particuliers.

1. Espaces de Hilbert [BMP]

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert.

Théorème 2.1 (projection sur un convexe fermé) Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de C qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé projection de x sur C et noté $p_C(x)$.

On a ainsi : $\forall y \in C$, $\|x - p_C(x)\| \leqslant \|x - y\|$.

Proposition 2.2 Sous les hypothèses précédentes, $p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et : $\mathrm{Re}\,(\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle) \leqslant 0$ pour tout $y \in C$.

Corollaire 2.3 Soit F un s.e.v. fermé de H alors $H = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$. Et donc pour F s.e.v. quelconque, $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

Théorème 2.4 (représentation de Riesz) Soit $\Phi : H \longrightarrow H'$, $y \longmapsto (x \longmapsto \langle x, y \rangle)$. Alors Φ est une isométrie surjective de H sur H'.

Application 2.5 Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive. Alors, il existe $a \in H$ tel que $J(a) = \inf_H J$. développement 1

2. Les espaces L^p

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$.

Définition 2.6 Pour $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ si $p < +\infty$ et $\|f\|_\infty := \inf \{ m > 0 \mid |f| \leqslant m \ \mu\text{-p.p} \}$. On définit alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) := \{ f : E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty \}$.

Théorème 2.7 (inégalité de Hölder) Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables et q l'exposant conjugué de p. Alors $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Application 2.8

- si μ est une mesure finie et $p < p'$ alors $L^{p'}(\mu) \subset L^p(\mu)$
- soient $p < p'$ alors $\ell^p(\mathbb{Z}) \subset \ell^{p'}(\mathbb{Z})$

Corollaire 2.9 (inégalité de Minkowski) Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables. Alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 2.10 L'application $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p(E)$.

3. Inégalités en probabilité [App]

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.

Théorème 2.11 (inégalité de Jensen) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable convexe et supposons X intégrable. Alors : $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leqslant \mathbb{E}[\varphi(X)]$

Exemples 2.12

- $\mathbb{E}[X^2] \geqslant \mathbb{E}[X]^2$
- $\mathbb{E}[1/X] \geqslant 1/\mathbb{E}[X]$ pour $X \geqslant 0$

Application 2.13

soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{E}(\theta)$

Alors $1/\overline{X_n}$ est un estimateur fortement consistant de θ mais biaisé.

III. Convexité et optimisation [BMP]

Proposition 3.1 Soient C un ouvert de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

- si x_0 est minimum local et si f est différentiable en x_0 alors $df(x_0) = 0$
- si x_0 est minimum local et si f est deux fois différentiable en x_0 alors la forme quadratique $d^2f(x_0)$ est positive

Proposition 3.2 Si C est un convexe non vide de E, alors les conditions nécessaires de la proposition 3.1 sont aussi suffisantes.

Lemme 3.3 Soient C un convexe non vide et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe sur C. Alors il existe au plus un point $x_0 \in C$ minimisant f sur C.

Application Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $q_S : x \longmapsto {}^t x S x$ et $E_S := \{x \mid q_S(x) \leqslant 1\}$.

Lemme 3.4 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Vol}(E_S) = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$ où $\mu : M \longmapsto (\det M)^{-1/2}$.

Lemme 3.5 La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 3.6 (John - Loewner) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal, contenant K.

développement 2

Proposition 3.7 Soit E e.v.n. de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue coercive. Si C est un fermé de E alors f est minorée sur C et atteint son infimum.

Corollaire 3.8 Soient E un e.v.n. et F un s.e.v. de dimension finie. Alors pour tout $x \in E$, il existe $x_0 \in F$ tel que $\|x - x_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Application 3.9 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension n, $b \in E$ et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Alors $f : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle + \langle b, x\rangle$ admet un unique point minimum donné par $x_0 = -u^{-1}$