Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et applications.

Dantzer
Gourdon

On considère $X \neq \emptyset$ un ensemble et (E,d) un espace métrique.

I. Divers types de convergence [Dan]

1. Suites de fonctions

Définition 1.1 Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E et $f : X \to E$. On dit que $(f_n)_n$ simplement vers f sur X si pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

Exemple 1.2
Soit $(f_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$.

Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$.

Définition 1.3 Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de X dans E converge uniformément vers $f : X \to E$ si la suite $(\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)))_n$ converge vers 0.

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in X, \; d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$

Exemples 1.4

- $X = \mathbb{R}_+$, $E = \mathbb{R}$, $f_n = \frac{1}{n+1} \mathbb{1}_{[n+1, +\infty[}$ alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle
- la suite de l'exemple 1.2 ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

Définition 1.5 Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de X dans E, vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant n_0, \forall x \in X, \; d(f_p(x), f_q(x)) \leqslant \varepsilon$.

Théorème 1.6 Supposons que (E,d) soit complet. Alors une suite de fonctions $(f_n)_n$ de X dans E converge uniformément sur X si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X.

⊛ cf dernière page : énoncés à ajouter

2. Séries de fonctions

On suppose ici que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.7 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E. On appelle série de fonctions de terme général $(f_n)_n$ la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. On note cette série $\sum_n f_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle S_n somme partielle d'indice n.

Définition 1.8 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E. On dit que la série de fonction $\sum_n f_n$ converge :

(i) simplement sur X si pour tout $x \in X$, la série $\sum_n f_n(x)$ converge

(ii) absolument sur X si la série $\sum \|f_n\|$ converge simplement sur X

(iii) uniformément sur X si $(S_n)_n$ converge uniformément sur X

Proposition 1.9 L'espace E est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

En particulier, si E est de Banach la convergence absolue implique la convergence simple d'une série de fonctions.

Définition 1.10 On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur X si la série numérique $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple 1.11
$X = \overline{D}(0,1)$, $E = \mathbb{C}$ et $f_n : z \longmapsto \frac{z^n}{n^2}$, $\sum f_n$ converge normalement sur X

Théorème 1.12 Si E est de Banach alors la convergence normale implique la convergence uniforme.

Contre-exemple 1.13
$X = \mathbb{R}_+$, $E = \mathbb{R}$, $f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}$ alors $\sum f_n$ converge uniformément sur X mais pas normalement

II – Inversion et convergences [Dan]

1. Continuité

On suppose (X, d) espace métrique.

Théorème 2.1 Soient $x_0 \in X$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $X \to E$ continues en x_0. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X alors f est continue en x_0.

Corollaire 2.2 Soit (K, δ) un espace métrique compact et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Alors $(C^0(K,E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, de plus il est complet.

Remarque 2.3 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues, une façon de montrer qu'elle ne converge pas uniformément consiste à en trouver la limite simple si celle-ci n'est pas continue, il n'y a pas convergence uniforme.

2. Intégration

Théorème 2.4 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $(E, \|.\|)$ de Banach. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors $\int_a^b \lim f_n(t)\,dt = \lim \int_a^b f_n(t)\,dt$.

Exemple 2.5

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = 0$$

Corollaire 2.6 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans E de Banach. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

ajouter thm de convergence monotone / dominée

3. Dérivabilité

Théorème 2.7 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un Banach E. On suppose que :

(i) il existe $x_0 \in I$, tel que $(f_n(x_0))_n$ converge

(ii) $(f_n')_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g

Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f de classe C^1 sur I et vérifiant $f' = g$. De plus, si I est bornée, la convergence est uniforme.

Remarque 2.8 Ce théorème reste vrai en remplaçant la condition "de classe C^1" par "dérivable".

III – Cas particuliers

1. Séries entières [Gou]

Définition 3.1 On appelle série entière une série de fonctions $\sum_n f_n$ où $(f_n)_n$ est de la forme $f_n = a_n z^n$ avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Lemme 3.2 (Abel) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée alors pour tout $z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge.

Théorème – Définition 3.3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence de la série par $R := \sup\{R \geq 0 \mid (a_n R^n)_n \text{ bornée}\}$. Alors :

(i) si $|z| < R$, la $\sum a_n z^n$ converge absolument

(ii) si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge

(iii) la série converge normalement sur tout disque $\overline{D}(0, R)$, $R < R$

Remarque 3.4 On ne peut rien dire au bord du disque de convergence.

Proposition 3.5 Une série entière de rayon de convergence R est holomorphe sur son disque de convergence. En notant S la fonction somme, $S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n$.

Conséquence 3.6 La fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est sa propre dérivée.

2. Séries de Fourier

Définition 3.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,dt$.

On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique définie par : $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$.

Théorème 3.8 (lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in C^0_m(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 3.9 (égalité de Parseval) Soit $f \in C^0_m(\mathbb{T})$ alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ converge et on a : $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,dt$.

Application 3.10 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Théorème 3.11 (Dirichlet) Soit $f \in C^1_m(\mathbb{T})$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en ce point x, converge $\frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}$.

Contre-exemple 3.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire 2π-périodique telle que : $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$

On pose :

$$a_{n,N} = \int_0^{\pi} \cos(nt).\sin\frac{(2N+1)t}{2}\,dt \quad \text{et} \quad s_{q,N} = \sum_{n=0}^{q} a_{n,N}$$

Alors $s_{N,N} \geq \frac{\log N}{2}$ et la série de Fourier de f diverge en 0.

développement 2

Application 3.13 (équation de la chaleur) Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ de coefficients de Fourier $(d_n)_n$.

Il existe alors une unique $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

- $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ 2π-périodique
- $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ bien définies, continues
- $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
- $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0$

De plus, u est de classe C^∞.

Énoncés manquants en partie I

Lemme 1.7 La suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par : $f_n : z \longmapsto \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers e^z.

Application 1.8 (théorème central limite) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance m et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

développement 1